

PISA 2006

IZHODIŠČA MERJENJA MATEMATIČNE PISMENOSTI V RAZISKAVI PISA 2006

Izvirnik je v angleščini in francoščini objavil OECD pod naslovom:

Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006

Compétences en sciences, lecture et mathématiques: Le cadre d'évaluation de PISA 2006

© 2006 OECD

Vse pravice pridržane.

© Pedagoški inštitut, Slovenija, za slovensko izdajo.

Za kakovost in usklajenost slovenskega prevoda z izvirnikom odgovarja Pedagoški inštitut.

Izvirnik je v angleščini objavil OECD pod naslovom:

M047 Lichen, M143 Coins, M154 Pizzas, M158 Shapes, M215 Braking, M267 Patio, M413

Exchange Rate

Vse pravice pridržane.

Za kakovost in usklajenost slovenskega prevoda z izvirnikom odgovarja Pedagoški inštitut.



Evropski
Socialni
Sklad

Aktivnosti v okviru projekta Evalvacija vzgoje in izobraževanja v RS omogoča sofinanciranje Evropskega socialnega sklada Evropske unije in Ministrstva za šolstvo in šport.

PISA 2006 – Program mednarodne primerjave dosežkov učencev
Izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006

Priredile in uredile: mag. Maša Repež, dr. Andreja Drobnič Vidic, dr. Mojca Štraus

Izdal: Nacionalni center PISA, Pedagoški inštitut, Ljubljana

Strokovni pregled: dr. Andreja Drobnič Vidic

Jezikovno ustreznost opravila: Vesna Vrabič

Tisk: Grafika 3000, d.o.o., Dob

Prva izdaja, prvi natis

Ljubljana, junij 2008

CIP – Kataložni zapis o publikaciji

Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

371.26:51

PISA 2006 : izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi
PISA 2006 : [program mednarodne primerjave dosežkov učencev] /
[priredile in uredile Maša Repež, Andreja Drobnič Vidic, Mojca
Štraus]. – 1. izd., 1. natis. – Ljubljana : Nacionalni center PISA,
Pedagoški inštitut, 2008

Prevod in priredba dela: Assessing scientific, reading and
mathematical literacy : a framework for PISA 2006

ISBN 978-961-6086-53-0

1. Repež, Maša

239459584

KAZALO

PREDGOVOR	6
PREDSTAVITEV RAZISKAVE PISA 2006	7
Uvod	7
Glavne lastnosti raziskave PISA 2006	10
Kako se raziskava PISA razlikuje od drugih mednarodnih raziskav	12
Pregled znanja, ki je vključeno na posameznem področju	13
Zajem podatkov, ocenjevanje in poročanje rezultatov v raziskavi PISA 2006	15
Spremljajoči vprašalniki in njihova uporaba	16
Struktura vođenja raziskave PISA in priprava izhodišč	17
MATEMATIČNA PISMENOST	20
Definicija matematične pismenosti	20
Teoretična podlaga za merjenje matematične pismenosti v raziskavi PISA	22
Opis dejavnikov za merjenje matematične pismenosti	29
MATEMATIČNA VSEBINA – ŠTIRJE VSEBINSKI SKLOPI	35
Količina	37
Prostor in oblika	40
Spremembe in odnosi	44

Negotovost	47
MATEMATIČNI PROCESI	52
Matematizacija	52
Kompetence	54
Razred reproduciranja	56
Razred povezovanja	60
Razred reflektiranja	62
Povzetek matematičnih procesov v raziskavi PISA	67
OCENJEVANJE MATEMATIČNE PISMENOSTI	69
Lastnosti vprašanj v raziskavi PISA	69
Oblike matematičnih nalog in vprašanj v raziskavi PISA	69
Tipi vprašanj	70
Struktura vrednotenja	73
Poročanje o matematičnih dosežkih	73
Pripomočki in orodja	75
Povzetek	75
PRIMERI MATEMATIČNIH NALOG	77
<i>1. primer matematične naloge – SVETILNIK</i>	<i>78</i>
<i>2. primer matematične naloge – POŠTNINA</i>	<i>83</i>
<i>3. primer matematične naloge – SRČNI UTRIP</i>	<i>86</i>
<i>4. primer matematične naloge – PLAČILO PO POVRŠINI</i>	<i>89</i>

<i>5. primer matematične naloge – VIŠINA UČENCEV</i>	92
<i>6. primer matematične naloge – GUGALNICA</i>	94
<i>7. primer matematične naloge – CISTERNA ZA VODO</i>	96
<i>8. primer matematične naloge – ODZIVNI ČAS</i>	99
<i>9. primer matematične naloge – KOCKE</i>	102
<i>10. primer matematične naloge – KONCENTRACIJA ZDRAVIL</i>	107
<i>11. primer matematične naloge – ZAVITA STAVBA</i>	111
<i>12. primer matematične naloge – ROCK KONCERT</i>	117
<i>13. primer matematične naloge – TEKOČI TRAKOVI</i>	119
DODATNI PRIMERI MATEMATIČNIH NALOG	121
<i>Lišaj</i>	122
<i>Kovanci</i>	126
<i>Pice</i>	128
<i>Liki</i>	129
<i>Zaviranje</i>	133
<i>Dvorišče</i>	137
<i>Menjalni tečaj</i>	139
VIRI	141

PREDGOVOR

Program mednarodne primerjave dosežkov učencev OECD/PISA *The OECD International Programme for Student Assessment PISA*, ki je nastal leta 1997, pomeni obvezo vlad držav članic OECD in sodelujočih držav partnerk, da bodo spremljale učinke izobraževalnih sistemov v smislu dosežkov učencev znotraj skupnih izhodišč merjenja. PISA združuje znanstvena in strokovna spoznanja sodelujočih držav. Sodelujoče države prevzemajo odgovornost za projekt na politični oziroma državni ravni. Strokovnjaki sodelujočih držav sodelujejo v delovnih skupinah, ki so zadolžene za vključevanje najboljšega razpoložljivega znanja na področju mednarodnih primerjav v raziskavo. S sodelovanjem v teh skupinah države zagotovijo, da so instrumenti, ki so uporabljeni v raziskavi PISA, mednarodno veljavni, upoštevajo vsebino kurikulumov in veljavnost merjenja v sodelujočih izobraževalnih sistemih, imajo dobre merske lastnosti ter je v njih poudarjena pristnost.

Raziskava PISA 2006 je nadaljevanje strategij zajema podatkov, ki so jih razvile države OECD leta 1997. Področja merjenja dosežkov ostajajo enaka kot v letih 2000 in 2003, le da je v raziskavi PISA 2006 glavno področje merjenja naravoslovna pismenost. Izhodišča za merjenje naravoslovne pismenosti so v raziskavi PISA 2006 pripravljena na novo. Izhodišča merjenja bralne pismenosti ostajajo enaka kot v letih 2000 in 2003, izhodišča merjenja matematične pismenosti pa so enaka kot leta 2003. Oboja izhodišča so predstavljena v publikacijah *Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assessment* (OECD, 1999) in *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills* (OECD, 2003a).

Podobno publikacija *Izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006* predstavlja temeljna načela izvedbe raziskave PISA 2006, in sicer v smislu vsebin in procesov, vključenih v raziskavo, in kontekstov, v katere je merjenje matematične pismenosti vpeto. Področja merjenja so ponazorjena z izbranimi primeri nalog. Te naloge so razvile skupine strokovnjakov pod vodstvom Raymonda Adamsa, Rossa Turnerja, Barryja McCraeja in Juliette Mendelovits z avstralskega inštituta za raziskovanje v izobraževanju (Australian Council for Educational Research, ACER).

Slovensko različico izhodišč smo pripravili v nacionalnem centru raziskave PISA na Pedagoškem inštitutu. Slovenska različica ne predstavlja neposrednega prevoda izvirnika, temveč priredbo, ki temeljna izhodišča matematične pismenosti PISA 2006 prenaša v slovenski šolski prostor.

PREDSTAVITEV RAZISKAVE PISA 2006

Uvod

Raziskava PISA je rezultat skupnega prizadevanja vseh držav članic OECD in številnih držav partnerk, da bi izmerile, kako dobro so 15-letni učenci in dijaki pripravljeni na izzive, ki jih čakajo v življenju. Starost 15 let je izbrana zato, ker v večini držav OECD učenci te starosti končujejo obvezno izobraževanje. To je priložnost za ovrednotenje znanja, ki so ga pridobili med približno deset let trajajočim izobraževanjem. Raziskava PISA obsega podatke o znanju, spretnostih in odnosu učencev, ki so posledica sprememb in razvoja šolskih kurikulumov, vendar širše od običajnih šolskih pristopov k merjenju tako, da se osredotoča na uporabo znanja v vsakodnevnih oziroma življenjskih situacijah. Merjena znanja in spretnosti kažejo sposobnost učencev za nadaljevanje vseživljenjskega učenja, sposobnost uporabe v šoli pridobljenega znanja v nešolskem okolju, sposobnost evalvacije svojih možnosti in sprejemanje odločitev. Raziskava, ki jo skupaj vodijo vlade sodelujočih držav, z visokokakovostnim strokovnim vodenjem na nacionalnih in mednarodni ravni združuje interese držav na področju izobraževalne politike.

V raziskavi PISA se poleg merjenja specifičnih kognitivnih področij, kot so branje, matematika in naravoslovje, zbirajo tudi podatki o učenčevem domu, njegovih pristopih do učenja, o njegovem zaznavanju učnega okolja in njegovi seznanjenosti z računalniki. V raziskavi PISA 2006 je zelo pomembno vključevanje podatkov o učenčevem odnosu do naravoslovja – vprašanja, povezana s tem, so priključena kognitivnemu delu preizkusov znanja. Priključevanje vprašanj o odnosu kognitivnim vprašanjem omogoča, da so vprašanja usmerjena v določeno situacijo oziroma kontekst. Ta vprašanja vključujejo podatke o zanimanju učencev za naravoslovje in o njihovi podpori znanstvenemu raziskovanju. Dosežki učencev na kognitivnem delu preizkusa znanja bodo povezani s temi pojasnjevalnimi dejavniki.

Raziskava PISA temelji na: i) zagotavljanju kakovosti prevodov, vzorčenja in izvedbe zbiranja podatkov na terenu; ii) na doseganju kulturne in jezikovne širine v uporabljenih instrumentih, še posebno prek sodelovanja držav pri pripravi nalog in vprašanj; iii) na najsodobnejši tehnologiji in metodologiji ravnanja s podatki. Ti temelji zagotavljajo visoko raven veljavnosti in zanesljivosti instrumentov, kar omogoča boljše razumevanje znanja, spretnosti in odnosov učencev ter izobraževalnih sistemov v celoti.

Raziskava PISA temelji na modelu vseživljenjskega učenja, v katerem se znanje in spretnosti, ki so potrebni za uspešno prilagajanje spreminjajočemu se svetu, pridobivajo skozi življenje. PISA se osredotoča na znanje in spretnosti, ki jih 15-letniki potrebujejo za prihodnost, ter poskuša zbrati podatke o tem, kako učenci uporabljajo pridobljeno znanje. To zbiranje podatkov pa ni omejeno z nacionalnimi učnimi načrti držav, ki sodelujejo v raziskavi. Poleg tega, da PISA meri znanje

učencev, ugotavlja tudi njihovo sposobnost uporabe znanja in izkušenj pri srečevanju s situacijami iz resničnega življenja. Da bi razumeli in presojali znanstvene podatke o varnosti hrane, mora, na primer, posameznik poznati nekaj osnovnih dejstev o sestavi hranilnih snovi in hkrati znati te informacije uporabiti. Izraz pismenost se v raziskavi PISA uporablja v smislu tega širšega pojmovanja koncepta znanja in spretnosti.

Raziskava PISA je zasnovana tako, da zbira podatke v triletnih ciklih in predstavlja dosežke učencev, šol in držav na področjih bralne, naravoslovne in matematične pismenosti. Hkrati omogoča vpogled v dejavnike, ki vplivajo na pridobivanje znanja, razvoj spretnosti in odnosov doma ter v šoli, in ugotavlja, kako ti dejavniki delujejo tudi v medsebojnih povezavah. Končni rezultat raziskave so ugotovitve, ki jih je mogoče uporabiti pri oblikovanju izobraževalne politike.

Ta publikacija predstavlja izhodišča merjenja matematične pismenosti v raziskavi PISA 2006, kot so bila določena za raziskavo PISA 2003, kjer je bila glavna domena merjenja matematika. Znotraj vsakega področja so predstavljene v definicijo vključene vsebine, procesi in konteksti, v katere je merjenje vpeto.

Okvir A: Kaj je PISA?

Povzetek glavnih značilnosti

Osnove

- Mednarodno standardizirano raziskavo so skupaj razvile sodelujoče države, v njej pa sodelujejo 15-letni učenci iz vseh izobraževalnih programov.
- Raziskava je v prvem ciklu potekala v 43 državah (32 držav leta 2000 in 11 držav leta 2001), v drugem ciklu leta 2003 je sodelovalo 41 držav, v tretjem ciklu leta 2006 pa je sodelovalo 56 držav.
- V raziskavi v vsaki državi sodeluje med 4500 in 10 000 učencev.

Vsebina

- Raziskava PISA 2006 pokriva področje bralne, matematične in naravoslovne pismenosti, vendar ne toliko v smislu merjenja znanj v okviru šolskega kurikula kot v smislu pomembnih znanja in spretnosti, ki jih posameznik potrebuje v odraslem življenju.
- Poudarek je na obvladovanju procesov in razumevanju konceptov ter sposobnosti delovanja v različnih situacijah v okviru posameznih merjenih področij.

Metode

- Učenci rešujejo preizkuse znanja v obliki delovnih zvezkov, kamor vpisujejo svoje odgovore, izvedba za vsakega učenca pa traja dve uri.
- Preizkusi znanja so kombinacija vprašanj izbirnega tipa in vprašanj, ki od učencev zahtevajo, da oblikujejo svoj odgovor. Vprašanja so organizirana v skupine, ki izhajajo iz resničnih življenjskih situacij.
- Vseh vprašanj v preizkusu znanja je za približno 390 minut reševanja, pri čemer učenci rešujejo različne kombinacije vprašanj.
- Učenci odgovarjajo tudi na 30-minutni vprašalnik. V njem odgovarjajo na vprašanja o sebi in svojem domu. Šolski ravnatelji izpolnijo 20-minutni vprašalnik o šoli.

Cikli

- Raziskava poteka vsake tri leta, zasnovana strategija zbiranja podatkov pa se razteza do leta 2015.
- Vsak cikel poglobljeno prouči glavno področje, ki sta mu namenjeni dve tretjini preverjanja znanja, na drugih dveh področjih pa se preverja povzetek bistvenih značilnosti spretnosti. Glavno področje leta 2000 je bila bralna pismenost, leta 2003 matematična pismenost in leta 2006 naravoslovna pismenost.

Rezultati

- Osnovne značilnosti znanja in spretnosti 15-letnih učencev.
- Pojasnjevalni kazalniki, ki povezujejo rezultate z značilnostmi učencev in šol. Raziskava leta 2006 ugotavlja tudi odnos učencev do naravoslovja.
- Kazalniki smernic, ki prikazujejo, kako se rezultati spreminjajo skozi čas.
- Širok nabor podatkov in izsledkov, ki so podlaga za pripravo strategij razvoja izobraževalnega sistema ter nadaljnjih raziskav.

Glavne lastnosti raziskave PISA 2006

Raziskava PISA 2006 je tretji cikel strategije zbiranja podatkov, ki so jo zasnovale sodelujoče države leta 1997. Publikaciji *Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assessment* (OECD, 1999) in *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills* (OECD, 2003a) pomenita izhodišča za merjenje izbranih področij v prvih dveh ciklih raziskave PISA. Rezultati teh dveh ciklov so bili predstavljeni v publikacijah *Knowledge and Skills for Life – First Results from PISA 2000* (OECD, 2001) in *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003* (OECD, 2004)¹. Državam omogočajo primerjave dosežkov njihovih izobraževalnih sistemov z drugimi državami. Podobno kot v prejšnjih ciklih raziskava PISA 2006 obsega področja bralne, matematične in naravoslovne pismenosti, poudarek pa je na naravoslovni pismenosti. Učenci odgovarjajo tudi na vprašalnike o spremljajočih podatkih, dodatne informacije pa so zbrane še z vprašalniki, ki jih izpolnjuje vodstvo šole. V raziskavi PISA 2006 je sodelovalo 57 držav in regij, vključno z vsemi državami članicami OECD (30 držav).

V raziskavi PISA želimo dobiti podatke o znanju, ki ga učenci pridobijo od začetka izobraževanja do starosti, ko je izobraževanje v večini držav še vedno obvezno, zato se raziskava osredotoča na 15-letnike, vključene v vse izobraževalne programe. V vsaki državi v raziskavi sodeluje med 5000 in 10 000 učencev iz najmanj 150 šol, kar predstavlja zadostno količino podatkov, iz katere lahko izluščimo rezultate glede na različne značilnosti učencev.

Glavni cilj raziskave PISA je ugotoviti, v kolikšnem obsegu so učenci pridobili širše znanje in spretnosti v bralni, matematični in naravoslovni pismenosti, ki jih bodo potrebovali pozneje v življenju. Ugotavljanje medkurikularnih kompetenc ostaja ključni del raziskave PISA 2006. Glavni razlogi za širše zasnovani pristop so:

- čeprav je pridobivanje specifičnega znanja pri šolskem učenju pomembno, je uporaba tega znanja v odraslem življenju odvisna od pridobitve širših znanj in spretnosti. V *naravoslovju* je specifično znanje, kot je poznavanje imen rastlin in živali, manj pomembno kot razumevanje širših pojmov, kot so poraba energije, raznolikost vrst in človeško zdravje, ko govorimo o problematikah, s katerimi se ukvarjajo odrasli v družbi. Pri *branju* so glavne spretnosti interpretacija pisnega gradiva, uporaba prebrane vsebine in kakovost besedila. Ko gre za vsakdanje situacije, je pri *matematici* pomembneje, da posameznik zna sklepati in razumeti odnose oziroma odvisnost, kot pa, da zna odgovoriti na značilna vprašanja iz učbenika;
- če bi se v mednarodnem okolju osredotočili izključno na kurikularno vsebino, bi to omejilo pozornost, namenjeno kurikularnim elementom, ki so skupni vsem ali skoraj vsem državam. To bi pomenilo številne

1 . Publikaciji sta dostopni na spletni strani www.pisa.oecd.org.

kompromise in raziskavo, ki bi bila preozka, da bi koristila državam, ki želijo izvedeti več o inovacijah v izobraževalnih sistemih drugih držav;

- nekatere širše in splošnejše spretnosti so nujne za razvoj učencev. Vsebujejo komunikacijo, prilagodljivost, fleksibilnost in reševanje problemov ter uporabo informacijskih tehnologij. Te spretnosti se razvijajo prek kurikulov več predmetov in medkurikularno. Zajem podatkov o teh spretnostih zato zahteva široko medkurikularno pozornost.

Raziskava PISA je dalj časa trajajoč program, katerega dolgoročni namen je pridobivanje podatkov za spremljanje usmeritev znanja in spretnosti učencev v različnih državah, kot tudi v različnih demografskih podskupinah v posameznih državah. V vsakem ciklu je v ospredju eno področje, ki sta mu namenjeni dve tretjini časa preverjanja. Glavno področje leta 2000 je bila bralna pismenost, leta 2003 matematična pismenost in leta 2006 naravoslovna pismenost. To omogoča natančno analizo dosežkov vsakega področja na vsakih devet let in analizo trendov vsake tri leta.

Podobno kot v prejšnjih ciklih raziskave PISA ima vsak učenec za reševanje preizkusa znanja na voljo dve uri, podatki pa so pridobljeni iz nalog in vprašanj, ki jih je skupaj za približno 390 minut reševanja. Vprašanja so razdeljena v 13 delovnih zvezkov, ki se delno prekrivajo. Vsak delovni zvezek rešuje dovolj učencev, da se lahko izpeljejo ustrezne ocene o dosežkih za vse učence v državi in v ustreznih podskupinah, kot so na primer dečki in deklice ter učenci z različnim socialnim in gospodarskim ozadjem. Učenci imajo na voljo še dodatnih 30 minut za odgovarjanje na vprašanja v vprašalnikih.

Raziskava PISA omogoča tri vrste kazalnikov:

- *osnovni kazalniki* omogočajo vpogled v osnovne značilnosti znanja in spretnosti učencev na merjenih področjih;
- *pojasnjevalni kazalniki* nakazujejo, kako so izkazana znanja in spretnosti povezana s pomembnimi demografskimi, socialnimi, gospodarskimi in izobraževalnimi spremenljivkami;
- *kazalniki trendov* izvirajo iz zbirk podatkov več ciklov in nakazujejo spremembe v dosežkih in povezavah med dosežki ter spremljajočimi dejavniki na ravni učencev in ravni šole.

Čeprav so kazalniki ustrezno sredstvo za usmerjanje pozornosti na problematična področja v izobraževalnem sistemu, navadno ne omogočajo odgovorov na vprašanja, ki se postavljajo v izobraževalni politiki. Zato je v raziskavi PISA pripravljen načrt analize podatkov, ki presega poročanje kazalnikov in omogoča iskanje odgovorov tudi na ta vprašanja.

Kako se raziskava PISA razlikuje od drugih mednarodnih raziskav

Raziskava PISA ni prva mednarodna primerjalna raziskava dosežkov učencev. Zadnjih štirideset let so te raziskave potekale v okviru *International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)* in *Education Testing Service's International Assessment of Educational Progress (IAEP)*.

Omenjene raziskave se osredotočajo na dosežke, ki so neposredno povezani s kurikulumom, in sicer le s tistimi deli kurikula, ki so v bistvu enaki v vseh sodelujočih državah. Deli kurikula, ki so značilni za eno samo državo ali manjše število držav, po navadi niso sestavni del teh raziskav.

Raziskava PISA ima v številnih pogledih drugačen pristop.

- Njen *izvor*: nastala je na podlagi pobude vlad držav, katerih interes je zbiranje takšnih podatkov in oblikovanje kazalnikov o izobraževalnih sistemih.
- Njena *rednost*: raziskava vsake tri leta vključi več področij, kar državam omogoča redno spremljanje njihovega napredka pri doseganju ključnih izobraževalnih ciljev.
- *Vključena starostna skupina učencev*: zajemanje podatkov o znanju mladih ljudi, ki so proti koncu obveznega izobraževanja, nam da koristne kazalnike o uspešnosti izobraževalnega sistema. Medtem ko večina mladih v državah OECD nadaljuje izobraževanje tudi po 15. letu starosti, se s to starostjo po navadi konča obdobje obveznega šolanja, v katerem je večina mladih deležna poučevanja splošnega kurikula. Na tej ravni je koristno določiti obseg pridobljenih znanj in spretnosti, ki bodo mladim pomagale v prihodnosti, vključno z individualiziranimi potmi nadaljnjega učenja, na katere se bodo mogoče odpravili.
- *Merjenje znanja in spretnosti*: to niso primarno skupni elementi nacionalnih šolskih kurikulumov, temveč znanja in spretnosti, ki veljajo kot nujni za bodoče življenje. To je temeljna značilnost raziskave PISA. Šolski kurikulum je po navadi sestavljen iz sklopov informacij in tehnik, ki jih mora posameznik usvojiti. Znotraj posameznih kurikularnih področij se kurikuli navadno manj posvečajo spretnostim, ki jih je treba na vsakem področju razviti za splošno rabo v odraslem življenju. Še manj se posvečajo splošnejšim kompetencam, kot so reševanje problemov in uporaba zamisli ter razumevanje položajev, s katerimi se srečujemo v življenju. Z raziskavo PISA se ne ugotavlja na kurikulumu temelječe znanje, temveč se ta vključuje v smislu merjenja širših konceptov in spretnosti, ki omogočajo uporabo kurikularnega znanja. Raziskava PISA ni omejena na skupne vsebine, ki se poučujejo v sodelujočih državah.

Ta poudarek na merjenju znanja v smislu obvladovanja vsebin in spretnosti ter širših konceptov je še posebno pomemben za države, ki skrbijo za razvoj človeškega kapitala, ki ga OECD opredeljuje kot:

“znanje, spretnosti, kompetence in druge lastnosti posameznikov, ki so pomembne za osebno, socialno in ekonomsko blagostanje”.

V najboljših primerih so se ocene ravni človeškega kapitala poskušale dobiti s približki, kot so stopnje končane izobrazbe posameznikov. Ko se je interes za človeški kapital razširil in so se vključile lastnosti, ki dovoljujejo polno družbeno in demokratično udeležbo v odraslem življenju, kar ljudem omogoča, da postanejo »vseživljenjski učenci«, je neprimernost teh približkov postala še bolj očitna.

Z neposrednim merjenjem znanja in spretnosti blizu ali ob koncu obveznega šolanja z raziskavo PISA ugotavljamo pripravljenost mladih ljudi za odraslo življenje in deloma tudi uspešnost izobraževalnega sistema. Namen raziskave PISA je ovrednotiti dosežke v povezavi s cilji izobraževalnih sistemov, kot jih opredeljuje družba, in ne toliko v povezavi s poučevanjem ter učenjem določenih sklopov vsebin. Ta pogled na rezultate izobraževanja je potreben, če želimo, da se šole in izobraževalni sistemi osredotočajo na sodobne izzive.

Pregled znanja, ki je vključeno na posameznem področju

Okvir B predstavlja izhodišča za merjenje znanja v raziskavi PISA 2006. Izhodišča poudarjajo funkcionalno znanje in spretnosti, ki posamezniku omogočajo aktivno sodelovanje v družbi. Tako sodelovanje zahteva več kot le sposobnost opravljanja nalog, ki jih posamezniku nalaga nekdo drug, na primer delodajalec. Pomeni sposobnost sodelovanja v procesu odločanja. V bolj večplastnih nalogah v raziskavi PISA morajo učenci ovrednotiti in uporabiti določeno vsebino naloge, ne le odgovoriti na vprašanja, ki imajo en sam pravilen odgovor.

Okvir B: Izhodišča merjenja pismenosti

Naravoslovna pismenost: nanaša se na posameznikovo naravoslovno znanje in uporabo tega znanja pri prepoznavanju vprašanj; pridobivanje novega znanja; na razlaganje znanstvenih pojavov in sklepanje o tematikah, ki so povezane z naravoslovjem; na razumevanje značilnosti naravoslovja kot oblike človeškega znanja in raziskovanja; zavedanje o tem, kako naravoslovje in tehnologija oblikujeta naše materialno, intelektualno in kulturno okolje, ter na pripravljenost sodelovanja pri reševanju vprašanj, povezanih z naravoslovjem in idejami naravoslovja.

Bralna pismenost: nanaša se na posameznikovo sposobnost razumevanja in uporabe napisanega besedila za doseganje določenih namenov, razvijanje posameznikovega znanja in zmožnosti ter sodelovanje v družbi.

Matematična pismenost: nanaša se na posameznikovo sposobnost prepoznavanja in razumevanja vloge, ki jo ima matematika v svetu, na sposobnost sprejemanja dobro utemeljenih odločitev in uporabo matematike na načine, ki ustrezajo potrebam posameznikovega življenja.

Naravoslovna pismenost (publikacijo z naslovom Izhodišča merjenja naravoslovne pismenosti v raziskavi PISA 2006 je objavil Nacionalni center PISA oktobra 2007) je opredeljena kot sposobnost uporabe naravoslovnega znanja in procesov, ne le za razumevanje naravnega sveta, temveč za sodelovanje v odločitvah, ki nanj vplivajo. Naravoslovna pismenost je opredeljena glede na:

- *naravoslovne pojme*, ki vzpostavljajo povezave, ki pomagajo razumeti sorodne pojave. Čeprav so pojmi v raziskavi PISA znani pojmi iz fizike, kemije, biologije in geografije, ne zadošča, da posameznik te pojme pozna in jih v nalogah prepozna, temveč jih mora znati v nalogah tudi uporabiti, da pride do ustreznega odgovora;
- *naravoslovne procese*, ki se osredotočajo na sposobnost pridobivanja, interpretacije in uporabe podatkov ter znanstvenih razlag. Trije taki procesi, ki so navzoči v raziskavi PISA, so povezani z: *i)* opisovanjem, razlaganjem in napovedovanjem znanstvenih pojavov, *ii)* razumevanjem znanstvenega poizvedovanja ter *iii)* interpretiranjem znanstvenih razlag in sklepov;
- *naravoslovne situacije*, v katerih se uporabljajo naravoslovno znanje in naravoslovni procesi. Opredeljena so tri glavna področja: znanost v življenju in zdravju, znanost, povezana z Zemljo in okoljem, ter znanost in tehnologija.

Bralna pismenost (publikacijo z naslovom Izhodišča merjenja bralne pismenosti v raziskavi PISA 2006 je objavil Nacionalni center PISA decembra 2007) je opredeljena v smislu učenčeve sposobnosti razumevanja in uporabe pisnega besedila za doseganje določenih namenov. Ta opredelitev bralne pismenosti se je dobro uveljavila v prejšnjih raziskavah, kot je *International Adult Literacy Survey (IALS)*, vendar je v raziskavi PISA še poglobljena, ker uvaja aktivni element – ne le sposobnost razumevanja besedila, temveč tudi njegovo uporabo pri oblikovanju lastnega razmišljanja in izkušenj. Bralna pismenost je opredeljena glede na:

- *obliko besedila*: pogosto se naloge iz branja osredotočajo na neko kontinuirano besedilo ali prozo, ki je predstavljena v stavkih in odstavkih. PISA poleg te oblike vključuje tudi nekontinuirano besedilo, ki informacije predstavlja drugače, na primer s seznamami, grafi ali diagrami. Prav tako ločuje med oblikami proze, kot so pripovedi, argumentacije ipd. To razločevanje temelji na načelu, da se bodo posamezniki v življenju srečali z različnimi oblikami napisanega gradiva, na primer prošnjami, obrazci ali oglasi, in da sposobnost branja omejenega števila oblik besedil, s katerimi se po navadi srečamo v šolah, ni dovolj velika;
- *bralni proces*: osnovnih spretnosti branja ne merimo, saj menimo, da so jih 15-letniki že usvojili. Naloge od učencev zahtevajo, da izkažejo sposobnosti pridobivanja informacij, oblikovanja splošnega razumevanja besedila, interpretacije besedila, uporabe informacij iz besedila in prepoznavanja oblik ter lastnosti besedila;
- *situacijo*: situacija je opredeljena z namenom priprave oziroma uporabe besedila, na primer roman, osebna pisma ali biografija, napisana za

posameznikovo osebno rabo; uradni dokumenti ali objave za javno rabo; priročniki ali poročila za poklicno rabo; učbeniki ali delovni listi za izobraževalno rabo. Nekateri učenci bolje rešujejo naloge v eni bralni situaciji kot v drugi, zato je v raziskavi PISA zaželena vključitev različnih tipov bralnih nalog v preizkuse znanja.

Matematična pismenost (opisana v nadaljevanju te publikacije) je opredeljena kot sposobnost učencev, da učinkovito utemeljujejo in posredujejo svoje zamisli, ko oblikujejo, rešujejo in interpretirajo rešitve matematičnih problemov v različnih situacijah. Matematična pismenost je opredeljena glede na:

- matematično *vsebino*, ki je predstavljena predvsem s štirimi vsebinskimi sklopi, in sicer *količina (števila in velikost)*, *prostor in oblika*, *spremembe in odnosi (funkcije in relacije)* in *negotovost (slučajnost)*, ter šele nato v povezavi s kurikularnimi področji, kot so številka, algebra in geometrija;
- matematične *procese*, ki so predstavljeni s splošnimi matematičnimi kompetencami. Te vključujejo uporabo matematičnega jezika, sestavljanje in uporabo modelov (matematično modeliranje) ter spretnosti reševanja problemskih nalog (problemska znanja). V nalogah preizkusov znanja PISA te spretnosti niso medsebojno izključujoče, saj velja, da je za reševanje katere koli matematične naloge potrebno več kompetenc. Naloge in vprašanja so zato organizirani po skupinah kompetenc, ki opredeljujejo tip razmišljanja in spretnosti, ki so potrebne;
- *situacije*, v katerih se uporablja matematika, in sicer glede na njihovo neposredno povezanost z učenci. Opredeljenih je pet situacij: osebna, izobraževalna, poklicna, javna in znanstvena.

Zajem podatkov, ocenjevanje in poročanje rezultatov v raziskavi PISA 2006

Podobno kot v prejšnjih ciklih raziskave tudi v raziskavi PISA 2006 zaradi lažje izvedljivosti učenci rešujejo pisne naloge. Delovni zvezki vključujejo različne tipe nalog oziroma vprašanj. Nekatera od učencev zahtevajo, da izberejo oziroma napišejo kratek odgovor, ki ga lahko neposredno primerjamo z edinim pravilnim odgovorom. Sem sodijo vprašanja izbirnega tipa ali vprašanja zaprtega tipa. Ta vprašanja imajo ali pravilen ali nepravilen odgovor in pogosto merijo manj zahtevne spretnosti. Druga vprašanja od učencev zahtevajo, da razvijejo in napišejo nekoliko daljši odgovor, kar omogoča merjenje širšega znanja in spretnosti. Pri teh vprašanjih je razpon sprejemljivih odgovorov širši, vrednotenje oziroma kodiranje pa je bolj zapleteno in lahko vsebuje tudi kode za delno pravilne odgovore.

Vsi učenci ne rešujejo vseh nalog. Naloge v raziskavi PISA 2006 so razdeljene v 13 sklopov, za vsak sklop pa je 30 minut časa za reševanje. V raziskavi PISA 2006 so: dva sklopa bralnih nalog, štirje sklopi matematičnih nalog in sedem sklopov naravoslovnih nalog. Sklopi so razvrščeni v 13 delovnih zvezkov. Vsak delovni zvezek vsebuje štiri sklope, vsak učenec pa rešuje enega izmed delovnih zvezkov. V vsakem delovnem zvezku je vsaj en sklop z naravoslovnimi nalogami.

Pismenost v raziskavi PISA merimo z nalogami, ki so sestavljene iz uvodnega besedila (vezano besedilo, tabela, graf ipd.), ki mu sledi določeno število vprašanj, povezanih z uvodnim besedilom. Ta pristop dopušča bolj poglobljena vprašanja, kot če bi vsako vprašanje vpeljalo novo vsebino. Taka postavitev nalog učencem omogoča, da se poglobijo v gradivo, s katerim nato lahko merimo različne vidike znanja in spretnosti.

O dosežkih v raziskavi PISA poročamo na lestvicah s povprečjem 500 in standardnim odklonom 100 za vsa tri merjena področja. To pomeni, da dve tretjini učencev v državah OECD dosegata rezultat med 400 in 600 točkami. Te točke pomenijo dosežke na posameznem področju pismenosti. Leta 2000 so bile lestvice za bralno pismenost razdeljene na pet ravni dosežkov. S primerjavo nalog s težavnostnimi stopnjami na teh ravneh dobimo opise znanja in spretnosti učencev po ravneh dosežkov na lestvici. Poleg tega so bili dosežki predstavljeni posebej za tri področja branja: pridobivanje informacij, interpretacijo besedila in evalvacijo prebranega besedila. Lestvice dosežkov so bile leta 2000 pripravljene tudi za matematično in naravoslovno pismenost, vendar brez ravni in z drugimi omejitvami zaradi manjšega obsega podatkov za ti področji. V raziskavi PISA 2003 je bil uporabljen enak pristop, le da je bila lestvica dosežkov matematične pismenosti, podobno kot pri branju, razdeljena na šest ravni. V okviru matematične pismenosti so bila določena štiri področja: prostor in oblika, spreminjanje in odnosi, količina in negotovost. Poročanje o naravoslovni pismenosti v raziskavi PISA 2006 je podobno in bo predstavljalo tudi dosežke na naravoslovnih podpodročjih. Raziskava PISA 2003 je prvič ponudila priložnost raziskovanja usmeritev v dosežkih pri bralni, matematični in naravoslovni pismenosti, raziskava PISA 2006 pa vključuje tudi dodatne informacije za te analize.

Spremljajoči vprašalniki in njihova uporaba

V raziskavi PISA se spremljajoči podatki zbirajo z vprašanji, na katera odgovarjajo učenci (približno 30 minut) in šolski ravnatelji (približno 20 minut). Ti vprašalniki² so ključnega pomena za analizo dosežkov učencev in so povezani z več spremljajočimi podatki na ravni učencev in ravni šol.

Z vprašanji v vprašalnikih se sprašuje po:

- družinskem ozadju učencev, vključno z gospodarskim, socialnim in kulturnim kapitalom;
- odnosu učencev do učenja, njihovih navadah in življenju znotraj šole ter družinskega okolja;
- kakovosti človeških virov na šoli in po materialnih virih, načinu organiziranja in financiranja šole (javna ali zasebna šola), procesih sprejemanja odločitev in praksah zaposlovanja;

2. Vprašalniki iz raziskave PISA 2000 so dostopni na spletni strani www.pisa.oecd.org.

- vsebini učnih praks, vključno s tipi in strukturami izobraževalnih sistemov, velikostjo razreda in oblikami sodelovanja staršev;
- strategijah samostojnega učenja, motivaciji in postavljenih ciljih, kognitivnih mehanizmih, kontrolni strategiji, naklonjenosti različnim tipom učnih situacij, slogih učenja in socialni spretnosti, potrebni za sodelovanje ter učenje;
- oblikah učenja in poučevanja pri naravoslovju, vključno z motivacijo učencev, aktivnostmi, povezanimi z naravoslovjem, in povezanostjo učnih strategij z naravoslovnimi dosežki.

Kot mednarodna dodatka sta na voljo še dva vprašalnika:

- *vprašalnik za učence o uporabi računalnikov*, ki se osredotoča na: i) dostopnost in uporabo informacijske tehnologije (IT), okolje, v katerem učenec največ uporablja IT in na način kako ga uporablja; ii) učenčeve spretnosti pri uporabi IT ter odnosa do računalnikov; in iii) ugotavljanje izvora znanja IT, torej, kje se je učenec naučil uporabljati računalnik in medmrežje. Poročilo, ki temelji na analizi podatkov, zbranih s tem vprašalnikom leta 2003, je OECD objavil v publikaciji z naslovom *Are Students Ready for a Technology-Rich World?: What PISA Studies Tell Us* (OECD, 2005);
- *vprašalnik za starše*, ki se osredotoča na učenčeve predhodne aktivnosti, povezane z naravoslovjem, na poglede staršev na učenčevo šolo in vključenost naravoslovja v bodočo poklicno pot učenca. S tem vprašalnikom se ugotavlja, ali so naravoslovno znanje in spretnosti potrebni za uspešno vključevanje na trg delovne sile. Vprašalnik vključuje tudi vprašanja o pogledih staršev na naravoslovje in okolje, vprašanja o stroških izobraževanja ter izobrazbi in poklicu staršev.

Informacije, zbrane z vprašalniki za učence in vodstva šol, kot tudi z obema dodatnima vprašalnikoma, so le del vseh informacij, ki jih zbiramo v raziskavi PISA. Kazalnike, ki opisujejo strukturo izobraževalnih sistemov (njihov demografski in gospodarski vidik, na primer stroški izobraževanja, vpis, značilnosti šol in učiteljev ter nekateri procesi v učilnici) in njihovo povezavo s trgom dela, OECD že uporablja in o njih poroča.

Struktura vodenja raziskave PISA in priprava izhodišč

Raziskava PISA pomeni skupno prizadevanje držav članic OECD in več držav partnerk, da bi vsakih nekaj let pridobile podatke o dosežkih učencev. Pristop pridobivanja podatkov v raziskavi PISA so z medsebojnim sodelovanjem razvile sodelujoče države, izvajajo pa ga organizacije na nacionalni ravni. Sodelovanje učencev, učiteljev in ravnateljev šol je ključnega pomena za uspeh raziskave PISA na vseh korakih priprave in izvedbe.

Določanje prednostnih nalog in nadzor doseganja ciljev v raziskavi PISA izvaja *Mednarodni svet raziskave PISA (PISA Governing Board)*, v katerem so z visokimi vladnimi predstavniki zastopane vse države. Delo Mednarodnega sveta raziskave PISA vključuje določanje prednostnih nalog za pripravo kazalnikov in instrumentov (delovnih zvezkov in vprašalnikov) ter poročanje o rezultatih. Strokovnjaki sodelujočih držav sodelujejo v delovnih skupinah, ki so zadolžene za vključevanje najboljšega razpoložljivega znanja na področju mednarodnih raziskav v raziskavo PISA. S sodelovanjem v teh skupinah države zagotovijo, da so instrumenti mednarodno veljavni in upoštevajo različno kulturno ter izobraževalno ozadje držav članic OECD. Prav tako zagotavljajo, da imajo naloge v delovnih zvezkih dobre merske lastnosti in sta v njih poudarjeni verodostojnost in veljavnost merjenja.

Za izvedbo raziskave PISA v *sodelujočih državah* na nacionalni ravni so odgovorni nacionalni koordinatorji, ki skrbijo, da izvedba poteka po natančno dogovorjenih postopkih. Nacionalni koordinator ima pomembno vlogo pri zagotavljanju visoke kakovosti izvedbe raziskave, preverjanju in evalvaciji rezultatov raziskave in njihovi analizi ter pisanju poročil in publikacij.

Za načrt in izvedbo raziskave PISA je v okviru izhodišč, ki jih je pripravil Mednarodni svet raziskave PISA, odgovorno *mednarodno združenje ustanov na področju merjenja znanja*, ki ga vodi Australian Council for Educational Research (ACER). Drugi partnerji v tem združenju so National Institute for Educational Measurement (CITO) na Nizozemskem, WESTAT in Educational Testing Service (ETS) v ZDA ter National Institute for Educational Policy Research (NIER) na Japonskem.

Sedež OECD v Parizu ima osrednjo odgovornost za celoten program, spremlja njegovo izvajanje, omogoča administrativno podporo Mednarodnega sveta raziskave PISA, skrbi za soglasje med sodelujočimi državami in deluje kot posrednik med Mednarodnim svetom raziskave PISA ter mednarodnim združenjem organizacij za izvedbo raziskave PISA. Poleg tega je sedež OECD odgovoren za končno pripravo kazalnikov, njihovo analizo in pripravo mednarodnih poročil ter publikacij. Te priprave potekajo v sodelovanju z Mednarodnim združenjem organizacij za izvedbo raziskave PISA in z državami članicami OECD ter državami partnerkami, tako na politični (Mednarodni svet raziskave PISA) kot na izvedbeni ravni (nacionalni koordinatorji).

Oblikovanje izhodišč raziskave PISA pomeni neprekinjeno prizadevanje od ustanovitve programa leta 1997. Opišemo ga lahko kot zaporedje naslednjih korakov:

- razvoj delovne različice izhodišč merjenja pismenosti in opis predpostavk, ki so podlaga za ta izhodišča;
- premislek o načinu priprave preizkusov znanja, ki bo tvorcem izobraževalne politike in raziskovalcem ponudil potrebne informacije o dosežkih učencev na posameznem področju, ter določanje ključnih značilnosti, ki jih je treba upoštevati pri oblikovanju nalog za mednarodno uporabo;

- operacionalizacija teh ključnih značilnosti pri pripravi preizkusov znanja, z opredelitvami, ki temeljijo na literaturi in izkušnjah izvajanja raziskav na velikih populacijah;
- preverjanje veljavnosti spremenljivk in vrednotenje prispevka vsake posamezne spremenljivke k razumevanju težavnosti nalog in dosežkov učencev v različnih sodelujočih državah;
- priprava osnutka za interpretacijo in pojasnjevanje rezultatov raziskave.

Glavni pomen priprave in preverjanja veljavnosti izhodišč merjenja na posameznem področju pismenosti so kakovostni podatki o dosežkih učencev. Izhodišča so pomembna tudi zaradi naslednjega:

- Tako pripravljena izhodišča omogočajo skupen jezik med državami in so podlaga za razpravo o namenih raziskave. Taka razprava spodbuja razvoj soglasja glede opredelitev merjenih področij in ciljev merjenja.
- Pregled vrste znanj in spretnosti, ki jih učenci izkazujejo, omogoča oblikovanje standardov za dosežke ali pričakovanih ravni dosežkov. Ko dosežke na merjenem področju bolje razumemo in jih lažje interpretiramo, lahko oblikujemo baze podatkov, iz katerih veliko uporabnikov dobi informacije o rezultatih izobraževalnega sistema.
- Prepoznavanje in razumevanje spremenljivk, ki so povezane z višjimi dosežki, omogoča dodatno evalvacijo tega, kar merimo, in postopno izboljševanje pristopov k merjenju.
- Razumevanje merjenja področja in povezovanja meritev z interpretacijami o rezultatih, ki jih izkazujejo učenci, pomeni pomembno povezavo med oblikovanjem strategije razvoja izobraževalnega sistema na politični ravni in pridobivanjem podatkov ter raziskovanjem podatkov, kar izboljšuje uporabnost zbranih podatkov.

MATEMATIČNA PISMENOST

Cilj raziskave PISA je ugotoviti, kako dobro so 15-letniki pripravljeni na izzive v prihodnosti. Osredotoča se torej na znanje, ki ga bodo mladi potrebovali v svojem vsakdanjem življenju. Raziskava PISA temelji na modelu vseživljenjskega učenja, za katero je značilno, da pridobivamo novo znanje in veščine, ki so nujno potrebni za uspešno delo in razvoj v spreminjajočem se svetu in ki jih skozi življenje lahko uspešno dopolnjujemo in nadgrajujemo.

Tako sta cilj raziskave PISA posredno priprava in razvoj kazalnikov o tem, koliko je izobraževalni sistem posameznih sodelujočih držav pripravil 15-letnike na prevzemanje aktivnih vlog državljanov v družbi. Raziskava ni omejena na kurikularno vsebino, ki so se je učenci naučili v šoli, temveč se osredotoča na ugotavljanje, ali učenci znajo uporabljati tisto, kar so se naučili, v situacijah, v katerih se bodo v življenju verjetno znašli.

Glavni cilj *merjenja* v raziskavi PISA je ugotoviti, do kakšne mere so mladi v dosedanjem šolanju pridobili uporabno znanje. Uporaba znanja, pridobljenega v šoli v odraslem življenju, je odvisna predvsem od pridobivanja širšega znanja in veščin. Prav zato, ker je cilj raziskave PISA ugotoviti, v kakšni meri so mladi pridobili široko temeljno znanje, ki ga lahko nadgrajujejo in uporabijo v življenjskih situacijah, so snovalci raziskave PISA uporabili namesto pojma znanje pojem pismenost.

Če se osredotočimo na *matematično pismenost*, želimo v raziskavi PISA ugotoviti, kako spretno lahko matematično znanje, pridobljeno v šoli, 15-letniki uporabijo pozneje v življenju. Ta starost učencev je izbrana zato, ker pri teh letih učenci končujejo obvezno formalno izobraževanje in s tem tudi učenje matematike.

V nadaljevanju bomo natančneje opredelili pojem *matematične pismenosti*.

Definicija matematične pismenosti

Pojem *matematična pismenost* v raziskavi PISA je opredeljen kot sposobnost in zmožnost 15-letnikov, da učinkovito razmišljajo, analizirajo in pojasnjujejo zamisli, medtem ko postavljajo, rešujejo in interpretirajo rešitve matematičnih problemov v različnih življenjskih situacijah. Raziskava PISA se osredotoča na probleme iz resničnega življenja, ki so pravzaprav nadgradnja primerov, s katerimi se učenci po navadi srečujejo pri pouku v šoli. V resničnem okolju se ljudje redno srečujemo z nakupovanjem, potovanji, kuhanjem, ukvarjanjem z osebnimi financami, presojanjem o političnih odločitvah itn. Pri tem je potrebna uporaba matematičnega znanja in veščin ter kvantitativnega ali prostorskega sklepanja, ki so v pomoč pri

pojasnjevanju, oblikovanju in reševanju problemov. Znanje in veščine so mladi pridobili in vadili v šoli s primeri, ki so v šolskih učbenikih. Življenjske situacije pa zahtevajo tudi sposobnost uporabe tega znanja in spretnosti v manj strukturiranem kontekstu, v katerem navodila niso tako natančna in v katerem morajo učenci sprejemati odločitve o tem, katere informacije in znanje so v danem problemu pomembni in kako naj jih smiselno uporabijo.

Z merjenjem *matematične pismenosti* v raziskavi PISA poskušamo ugotoviti, do kakšne mere so 15-letniki sposobni prevzeti vlogo informiranih, razmišljujočih posameznikov in inteligentnih potrošnikov. Vse pogosteje se spoprijemamo z različnimi nalogami, ki vključujejo različne vrste matematičnega znanja (oziroma posamezne matematične koncepte), kot so na primer sposobnost merjenja in računanja z različnimi količinami, prostorska predstava, poznavanje načel verjetnosti in podobno). V množičnih občilih, torej časopisih, revijah, na televiziji in internetu, je veliko informacij v obliki tabel, grafikonov in drugih prikazov o vremenu, ekonomiji, medicini in športu, če omenimo le nekatera področja. Ljudje smo zasuti z informacijami o različnih problematikah, kot so globalno segrevanje in učinek tople grede, naftna razlita v morjih in izginjajoče podeželje. Poleg tega pa se pogosto soočamo tudi z branjem obrazcev, tabel voznih redov, z izvajanjem denarnih transakcij, iskanjem najugodnejšega nakupa nekega izdelka itn. *Matematična pismenost* v raziskavi PISA se osredotoča na sposobnost 15-letnikov, da znajo v šoli pridobljeno matematično znanje, veščine in življenjske izkušnje prenesti na nove življenjske probleme in jih spretno reševati.

Definicija *matematične pismenosti* v raziskavi PISA se glasi:

Matematična pismenost je posameznikova sposobnost prepoznavanja in razumevanja vloge, ki jo ima matematika v svetu, sposobnost postavljanja dobro utemeljenih odločitev in sposobnost uporabe in vpletenosti matematike na načine, ki izpolnjujejo potrebe posameznikovega življenja kot konstruktivnega in razmišljujočega posameznika.

V nadaljevanju so podrobneje razloženi nekateri pojmi, ki so v definiciji *matematične pismenosti*, kot jo razumemo v raziskavi PISA. Nekatere opombe lahko pripomorejo h globljemu razumevanju te definicije.

Pojem *matematična pismenost* je bil izbran, ker poudarja uporabno plat matematičnega znanja v različnih situacijah. Da pa bi bila uporaba mogoča in zanesljiva, so potrebni temeljno matematično znanje in spretnosti. Pojem *pismenost* v jezikovnem smislu predpostavlja zadosti bogat besedni zaklad in zadostno znanje slovničnih pravil, glasoslovja, pravopisa in podobno, vendar ne more biti omejen le na to. Da bi se lahko izražali, morajo ljudje združiti te elemente in jih uporabiti v resničnih življenjskih situacijah, s katerimi se srečujejo. Podobno *matematične pismenosti* ne moremo omejiti le na poznavanje matematične terminologije, definicij in postopkov, kot tudi ne na spretnosti pri izvajanju določenih operacij in metod. *Matematična pismenost* pomeni ustvarjalno združevanje teh elementov, kakor jih zahteva dano okolje, v katerega je problem postavljen.

Pojem *svet* v definiciji pomeni naravno, socialno in kulturno okolje, v katerem posamezniki živijo. Freudenthal (1983) je napisal: »Naši matematični pojmi, strukture

in zamisli so bili izumljeni kot orodje za opis in urejanje fizičnega, socialnega in duhovnega sveta.«

Besedna zveza *uporaba in vpletenost matematike* se nanaša na razpon uporabe matematike in reševanja matematičnih problemov v najrazličnejših situacijah in na različnih ravneh težavnosti. Hkrati nakazuje širšo vpletenost in povezanost matematike s posameznikom. Ta vpletenost se kaže v posameznikovem razmišljanju, v dialogu, povezovanju, ocenjevanju in celo uživanju v matematiki. Zato opredelitev področja *matematične pismenosti* obsega tako funkcionalno uporabo matematike v ozkem smislu kot tudi pripravljenost za nadaljnji študij na tem področju, dodan pa je tudi estetski in rekreacijski element matematike.

Fraza *posameznikovo življenje* vključuje posameznikovo zasebno življenje, poklicno življenje in socialno življenje z vrstniki in sorodniki, pa tudi življenje pripadnika določene skupnosti.

Kot smo omenili že v uvodu, je ključni dejavnik *matematične pismenosti* sposobnost postavljanja, oblikovanja, reševanja in interpretacije problemov z različnih področij z uporabo matematičnega znanja in spretnosti. Področja segajo od čisto matematičnih področij do takih, v katerih matematična struktura ni navzoča ali jasna in v katerih jo mora posameznik oblikovati sam. Prav tako je pomembno poudariti, da merjenje *matematične pismenosti* ne pomeni le preverjanje znanja matematike na neki minimalni ravni; meri tudi izvajanje matematičnih operacij in izračunov ter uporabo matematike na različnih področjih, od vsakdanjih do nenavadnih, od preprostih do večplastnih.

Z matematiko povezane vedenjske in osebnostne lastnosti posameznika, kot so samozavest, radovednost, občutek za bistvo in vedoželjnost, neposredno niso predmet merjenja *matematične pismenosti*, kljub vsemu pa veliko prispevajo k njej. Teoretično je mogoče izkazati zgledno *matematično pismenost*, ne da bi imeli dobro razvite te vedenjske in osebnostne lastnosti posameznika. V praksi pa ni zelo verjetno, da bo izkazoval dobro *matematično pismenost* nekdo, ki nima določene stopnje samozavesti, vedoželjnosti, radovednosti in občutka za bistvo. Kljub povezanosti vedenjskih in osebnostnih lastnosti za izkazovanje *matematične pismenosti* pa te lastnosti v merjenju *matematične pismenosti* v raziskavi PISA niso vključene, vendar se pojavljajo v drugih delih raziskave.

Teoretična podlaga za merjenje matematične pismenosti v raziskavi PISA

Definicija *matematične pismenosti* v raziskavi PISA je skladna s širšo in integrativno teorijo o strukturi in uporabi jezika, kot je predstavljena v sociokulturnih študijah. James Gee v delu *Preamble to a Literacy Program* (1998) pravi, da pojem *pismenost* pomeni človeško uporabo jezika. Sposobnost branja, pisanja, poslušanja in govorjenja jezika je najpomembnejše orodje, s katerim je posredovana človeška družbena aktivnost. Pravzaprav imata vsak človeški jezik in uporaba jezika zapleteno obliko, ki je večplastno povezana z različnimi nalogami. Da bi bila oseba v nekem jeziku pismena, pomeni, da mora poznati številne oblikovne vire jezika in biti sposobna uporabiti te vire za številne različne družbene funkcije. Analogno je matematika jezik

izražanja, kar pomeni, da morajo učenci spoznati oblikovne lastnosti tega jezika. Spoznati morajo matematične pojme, znake in simbole, jih znati pravilno uporabiti pri izvajanju določenih operacij in postopkov različnih matematičnih področij ter z njimi smiselno predstaviti zamisli in rešitve ter se naučiti uporabljati take zamisli za reševanje nerutinskih problemov v različnih situacijah, na različnih področjih družbenega delovanja. Oblikovne lastnosti matematike vključujejo poznavanje osnovnih izrazov, postopkov in pojmov, ki se jih po navadi učenci učijo v šolah, ter znanje o tem, kako te izraze in pojme povezati ter uporabiti. Na žalost lahko posameznik pozna veliko matematičnih izrazov, postopkov in pojmov, ne da bi jih znal smiselno izbrati, povezati in uporabiti za reševanje problemov.

Uporabo matematike kot jezika izražanja določenih lastnosti in odnosov, ki je pomemben del merjenja *matematične pismenosti* v raziskavi PISA, snovalci raziskave kratko imenujejo *matematizacija*. Proces *matematizacije* lahko predstavimo s petimi koraki:

1. seznanjanje s problemom, postavljenim v realno okolje,
2. prepoznavanje matematike in matematičnih pojmov v problemu,
3. preoblikovanje problema v matematični problem glede na prepoznane matematične pojme in odstranjevanje realne situacije,
4. reševanje matematičnega problema,
5. prenos rešitve matematičnega problema v realni problem.

Proces ilustrirajmo z naslednjim preprostim primerom.

1. primer matematične naloge: SRČNI UTRIP

Iz zdravstvenih razlogov bi morali ljudje omejiti svoje napore, na primer med športom, da ne bi presegli določene frekvence srčnega utripa.

Dolga leta je bil odnos med posameznikovim priporočenim maksimalnim srčnim utripom in njegovo starostjo opisan z naslednjo formulo:

Priporočen maksimalni srčni utrip = $220 - \text{starost}$.

Pred kratkim so raziskave pokazale, da je to formulo treba malo spremeniti. Nova formula je:

Priporočen maksimalni srčni utrip = $208 - (0,7 \cdot \text{starost})$.

Vprašanja v tem problemu se osredotočajo na razliko med dvema formulama in kako ti vplivata na izračun maksimalnega srčnega utripa.

Ta problem lahko rešimo, če upoštevamo splošno strategijo, ki jo uporabljajo matematiki in jo snovalci raziskave imenujejo *matematiziranje*. Pet korakov *matematizacije* se na danem primeru izvede nekako takole:

- Proič, proces matematiziranja se začne s problemom, postavljenim v realno okolje.

Iz primera je razvidno, da je realno področje zanimanje za fizično zdravje in kondicijo. Pomembno pravilo pri rekreaciji je, da mora biti posameznik previden, saj prevelik napor lahko škodi zdravju. Na to nas opozori besedilo, v katerem sta povezana zdravje in srčni utrip ter v katerem je omenjen priporočen maksimalni srčni utrip.

- *Drugič, reševalec problema mora prepoznati v njem matematiko in preoblikovati problem glede na prepoznane matematične pojme.*

Dani sta dve formuli, ki ju je treba razumeti, naloga pa zahteva, da ti dve formuli primerjamo in ugotovimo njun matematični pomen. Formuli predstavljata odnos med priporočenim maksimalnim srčnim utripom in starostjo osebe.

- *Tretji korak vključuje postopno odstranjevanje realne situacije.*

Obstajajo različni načini, kako problem odstranimo iz realne situacije in ga prestavimo v izključno matematično okolje. En način je, da formule, ki so zapisane z besedami, preoblikujemo v algebranske izraze, na primer takole:

$$y = 220 - x$$

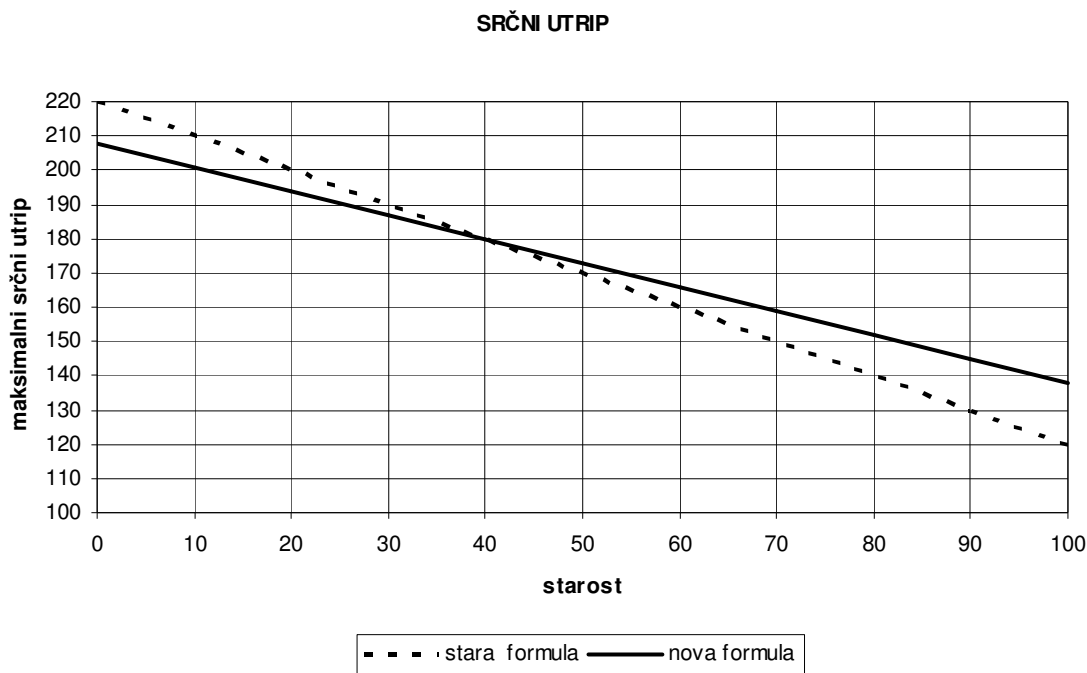
$$y = 208 - 0,7 \cdot x.$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da y izraža maksimalni srčni utrip v utripih na minuto, x pa starost v letih.

Drug način bi bil, da s pomočjo formul, zapisanih z besedami, neposredno narišemo graf. V grafu sta narisani dve premici, saj sta zapisani enačbi prve stopnje.

Grafa premic imata različna naklona in se sekata, kot kaže prikaz 1.

Prikaz 1: Grafični prikaz odvisnosti maksimalnega srčnega utripa od starosti



Ti trije koraki nas pripeljejo od realnega, vsakdanjega problema do matematičnega problema.

- Četrty korak je reševanje matematičnega problema.

Matematični problem je primerjava obeh formul ali premic na grafu in opis razlik maksimalnega priporočenega srčnega utripa za ljudi različnih starosti. Najbolje je začeti tako, da poiščemo skupno rešitev obeh enačb oziroma določimo, kje se premici na grafu sekata.

Rešimo torej enačbo:

$$220 - x = 208 - 0,7x.$$

Dobimo rezultat $x = 40$ in tej vrednosti pripadajočo vrednost za y , ki je 180. Premici v grafu se sekata v točki (40, 180). To točko je mogoče najti tudi na grafu v prikazu 1.

Ker je smerni koeficient prve premice -1 , druge pa $-0,7$, vemo, da je graf prve premice bolj strm kot graf druge premice. Graf premice z enačbo $y = 220 - x$ leži nad grafom premice $y = 208 - 0,7x$ za vrednosti x , manjše od 40; graf prve premice leži pod grafom druge premice za vrednosti x , večje od 40.

V 5. koraku ugotovimo, ali nam rešitev matematičnega problema pomaga pri reševanju realnega, vsakdanjega problema.

- Peti korak je povezan z vprašanjem *Kaj je pomen te strogo matematične rešitve v smislu realnega sveta?*

Pomen ni tako težak, če vemo, da x predstavlja starost osebe in y maksimalni srčni utrip. Če je oseba stara 40 let, dobimo z obema formulama enak rezultat, in sicer maksimalni srčni utrip je 180. Staro pravilo dovoljuje višji srčni utrip mlajšim ljudem. Ekstremen primer je naslednji: če je starost 0, je po stari formuli maksimalni srčni utrip 220, po novi pa 208.

Za starejše ljudi, v tem primeru za tiste, stare več kot 40 let, nova formula dopušča višji maksimalni srčni utrip. Spet si pogledajmo ekstremen primer: za starost 100 let stara formula dopušča maksimalni srčni utrip 120, nova pa 138.

Učenci pa morajo v problemu prepoznati še marsikaj drugega: formulama manjkajo matematična natančnost in pogoji uporabe ter dajeta vtis le navidezne znanstvenosti. V resnici formuli omogočata le približno oceno (merjenje na palec), ki jo je treba previdno uporabljati, predvsem pri ekstremnih vrednostih.

Primer kaže, da lahko tudi s preprostimi vprašanji, ki se jih da uporabiti kljub omejitvam velike mednarodne raziskave in na katere se da odgovoriti v kratkem času, še vedno zasledimo celoten cikel *matematizacije* in reševanja problemskih nalog.

Opisani proces *matematizacije* prikazuje, kako v širšem smislu matematiki pogosto »delajo matematiko«, kako ljudje uporabljajo matematiko v poklicu in kako bi morali ljudje uporabljati matematiko, da bi lahko v celoti in odgovorno sodelovali v družbi. Primarni izobraževalni cilj za vse učence bi moralo biti učenje *matematizacije*.

Danes in v prihodnosti vsaka država potrebuje matematično pismene državljane, ki se soočajo z večplastno in hitro spreminjajočo se družbo. Dostopnost informacij hitro raste, ljudje pa morajo biti sposobni odločiti se, kako s temi informacijami ravnati. Ljudje v razpravah vse pogostejše vključujejo informacije količinske narave, s katerimi podpirajo dane trditve. Ljudje morajo biti matematično pismeni, da lahko presojajo in ocenjujejo natančnost ugotovitev ter trditev različnih študij in analiz. Sposobnost presojanja točnosti trditev in argumentov postaja vse pomembnejši dejavnik vsakega odgovornega posameznika. Opisani koraki *matematizacije* so osnovni elementi uporabe matematike v večplastnih situacijah. Posledica nesposobnosti uporabe matematike lahko povzroči napačne osebne odločitve, povečano dovzetnost za psevdoznanstvenost in napačno delovanje v poklicnem in javnem življenju.

Matematično pismeni posamezniki se zavedajo, kako hitro se pojavljajo spremembe in potrebe po vseživljenjskem učenju. Ustvarjalno, sproščeno in praktično prilagajanje spremembam je nujen pogoj za uspešno življenje vsakega posameznika. Spretnosti, ki se jih posameznik nauči v šoli, verjetno ne bodo zadostovale njegovim potrebam, ko odraste.

Zahteve po aktivnih, odzivnih in kritičnih posameznikih vplivajo tudi na delovno silo. Od delavcev se vse manj in manj zahteva ponavljajoče se rutinsko in fizično delo, ki ga opravljajo vse življenje. Namesto tega upravljajo visoko tehnološko razvite stroje, se srečujejo z veliko različnimi informacijami in sodelujejo pri skupinskem reševanju problemov. Gibanje nakazuje, da bo vedno več poklicev zahtevalo sposobnost razumevanja, posredovanja informacij, komunikacije in pojasnevanja pojmov ter postopkov, ki temeljijo na matematičnem razmišljanju. Koraki procesa *matematizacije* so temelji takega matematičnega razmišljanja.

In končno, matematično pismeni posamezniki razvijejo pozitiven odnos do matematike kot dinamične, spreminjajoče se in pomembne discipline, ki jo pogosto uporabljajo za svoje potrebe.

Operativni problem, s katerim se srečujejo snovalci raziskave OECD/PISA, je, kako oceniti, ali so 15-letni učenci matematično pismeni v smislu sposobnosti *matematiziranja*. Na žalost je v omejenem času, ki ga imajo učenci na voljo pri reševanju problemov iz raziskave PISA, težko oceniti celoten proces *matematizacije*, ker večina večplastnih realnih problemov vključuje tudi sodelovanje, razpravo in iskanje po različnih ustreznih virih, česar v raziskavi ni mogoče v celoti vključiti.

Primer *matematizacije* pri obširnejšem problemu je naloga z naslovom *Počitnice*. Naloga je bila vključena med problemske naloge v raziskavi PISA 2003.

Naloga je povezana z matematiko, čeprav ne obstaja neposredna povezava z matematično snovjo v osnovni ali srednji šoli. Je pa povezana s področjem diskretne matematike. Prav tako ni vnaprej predpisanega postopka za reševanje tega problema. Ko se učenci srečajo s problemom iz učbenika ali pri preverjanju znanja v šoli, pogosto že vnaprej vedo, kateri postopek reševanja morajo uporabiti. Pri reševanju resničnih, življenjskih problemov pa navadno nimamo na voljo dobro znanih postopkov in metod.

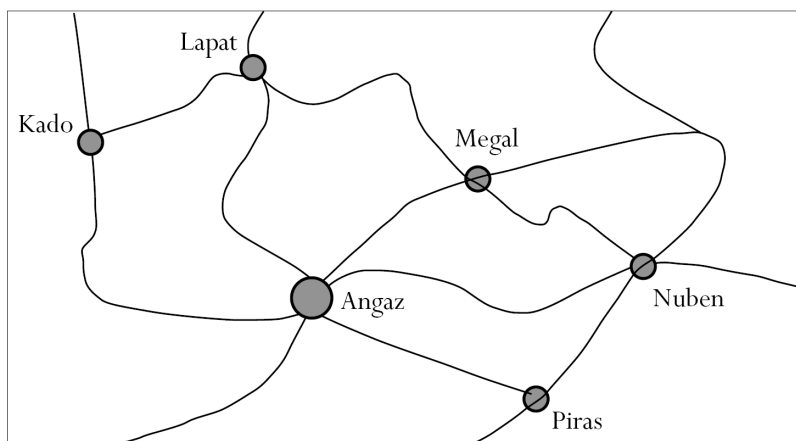
Naloga ima dve vprašanji in se ukvarja z načrtovanjem poti ter krajev prenočevanja na počitnicah. Učenci so imeli na voljo preprost zemljevid in diagram, ki prikazuje razdaljo med kraji, narisanimi na zemljevidu.

2. primer matematične naloge: POČITNICE

Tvoja naloga je določiti najboljši počitniški potovalni načrt.

Slika 2.1 je zemljevid območja, slika 2.2 pa tabela z razdaljami med mesti.

Slika 2.1: Zemljevid cest, ki povezujejo mesta



Slika 2.2: Dolžina najkrajših cestnih povezav med mesti, izražena v kilometrih

Angaz						
Kado	550					
Lapat	500	300				
Megal	300	850	550			
Nuben	500		1000	450		
Piras	300	850	800	600	250	
	Angaz	Kado	Lapat	Megal	Nuben	Piras

1. vprašanje: POČITNICE

Izračunaj dolžino najkrajše ceste med Nubenom in Kadom.

Dolžina: kilometrov.

2. vprašanje: POČITNICE

Sonja živi v Angazu. Obiskati hoče Kado in Lapat. Vsak dan lahko prepotuje največ 300 kilometrov, na poti pa se lahko večkrat ustavi in ponoči tabori kjer koli med dvema mestoma.

Sonja bo v vsakem mestu ostala dve noči, da si ju bo lahko ves dan ogledovala.

Sestavi Sonjin potovalni načrt in v spodnjo tabelo vpiši, kje bo preživela posamezne noči.

dan	nočitev
1	Taborjenje med Angazom in Kadom.
2	
3	
4	
5	
6	
7	Angaz

Prepoznamo lahko vseh pet korakov *matematizacije*: problem je postavljen v realno okolje; v njem lahko prepoznamo matematične pojme, kot so tabele, matrike in grafi, ki predstavljajo model realnega sveta, saj so informacije dane tabelarno in z zemljevidi. Treba je odstraniti odvečne informacije in se posvetiti informacijam, še

posebno tistim, ki jih zapišemo v strogo matematičnem jeziku. Ko je problem rešen v okviru matematike, je rezultat treba prenesti nazaj v realno situacijo.

Čeprav naloga ne zahteva veliko branja, je zelo večplastna, ker morajo učenci prepoznati, preoblikovati in uporabiti tako podatke z zemljevida (grafa) kot tudi tiste iz diagrama z razdaljami. Nekatere razdalje, ki jih morajo učenci poiskati v diagramu, zahtevajo drugačno branje informacij od tistega, ki so ga vajeni. Učenci po navadi berejo informacije od zgoraj navzdol ali od leve proti desni. Pri določanju razdalje od Nubena do Pirasa pa mora učenec iskati razdaljo od Pirasa do Nubena, kot lahko preberemo v publikaciji *Problem Solving for Tomorrow's World* (OECD, 2004a).

Drugo vprašanje postavlja Sonji pri doseganju cilja številne omejitve, ki jih je treba upoštevati vse hkrati, in sicer: največ 300 prepotovanih kilometrov na dan z začetkom in koncem v Sonjinem domačem mestu Angazu, obisk Kada in Lapata ter dvakratno prenočevanje v obeh mestih.

Dodati je treba, da so imeli učenci pri reševanju problemskih nalog, med katerimi je bila tudi ta, na voljo več časa za odgovarjanje, kot je bil povprečen čas za reševanje matematičnih nalog, ki so bile navadno krajše.

Če bi želeli oceniti, ali 15-letniki znajo uporabljati pridobljeno matematično znanje za reševanje matematičnih problemov, s katerimi se srečujejo vsak dan, bi v idealnem primeru morali zbrati informacije o njihovi sposobnosti *matematizacije* večplastnih situacij, kakršna je prikazana v nalogi *Počitnice*. Toda to delo je zamudno in zato nepraktično, zato so snovalci raziskave OECD/PISA pripravili naloge, ki ocenjujejo le različne dele tega procesa. Naslednji razdelek opisuje postopke, ki so bili izbrani za oblikovanje nalog, ki v enaki meri pokrivajo vseh pet korakov *matematizacije*. Glavni namen tega je uporabiti odgovore učencev pri teh nalogah za oblikovanje lestvice dosežkov *matematične pismenosti*.

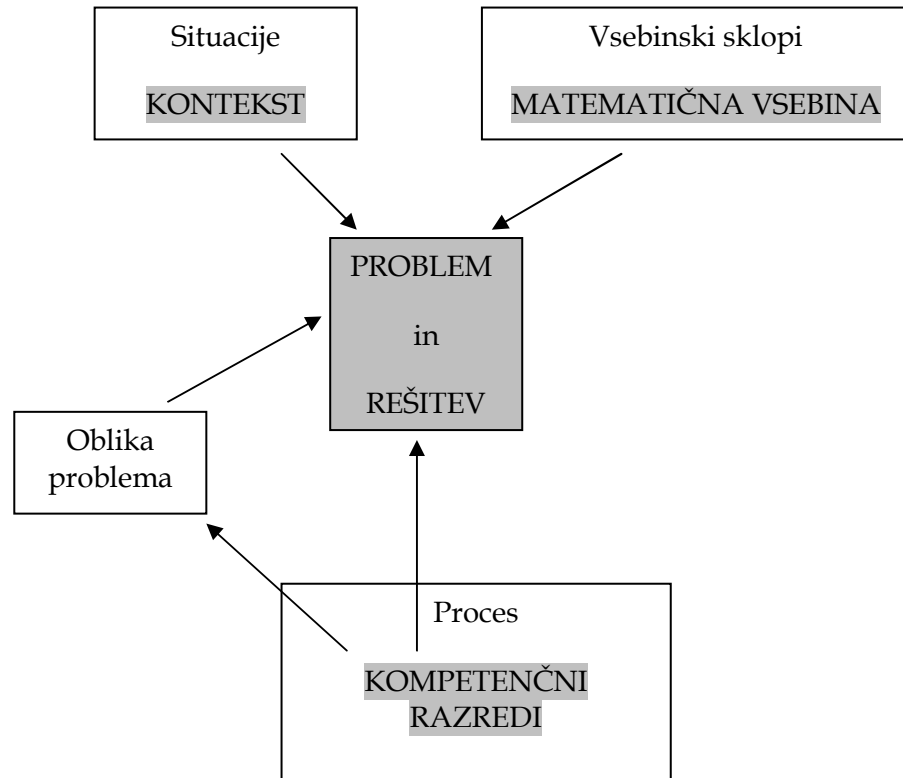
Opis dejavnikov za merjenje matematične pismenosti

V definiciji merjenja *matematične pismenosti* smo navedli, čemu, kako in koliko lahko 15-letniki smiselno uporabljajo matematiko, ko se srečajo z realnim, življenjskim problemom. Bolj splošno bi lahko rekli, da smo navedli splošna načela merjenja *matematične pismenosti* 15-letnikov. Da bi lahko natančno razložili področje merjenja *matematične pismenosti*, ločimo tri komponente:

- *situacijo ali kontekst*, v katero je problem postavljen,
- *matematično vsebino*, ki jo morajo učenci poznati in uporabiti, da problem lahko rešijo, ter najpomembnejše,
- *kompetence*, ki jih morajo prikazati in aktivirati, da povežejo resnični svet, v katerem problem nastane, z matematiko, in ki omogočajo rešitev problema.

Te kompetence so predstavljene v prikazu 2.

Prikaz 2: Komponente matematične pismenosti



Opišimo posamezne komponente v prikazu.

Kakovost posameznikove *matematične pismenosti* je odvisna od tega, kako dobro zna posameznik prepoznati in uporabiti matematično znanje ter veščine v različnih realnih *situacijah* in *kontekstih*, v katere so problemi lahko postavljeni. Na to zagotovo vplivajo posameznikove izkušnje oziroma dejstvo, kolikokrat v življenju so bili mladi soočeni s kakšnim podobnim problemom in kako so se odzvali. Problemi v raziskavi PISA črpajo svojo vsebino iz resničnega sveta na dva načina. Prvič, problemi obstajajo znotraj neke širše situacije, lahko bi rekli tudi širšega okolja, ki je pomemben za posameznikovo življenje. Ta situacija ali okolje je del resničnega sveta in je v prikazu 2 označena v kvadratu levo zgoraj. Znotraj te situacije je predstavljen specifični kontekst problema. To je predstavljeno z majhnim kvadratom znotraj prikazanega kvadrata levo zgoraj.

Situacija, v kateri nastopijo problemi raziskave PISA, je lahko *osebna, izobraževalna, poklicna, javna* oziroma *širše družbena* ali *znanstvena*.

V 1. in 2. primeru matematične naloge *Srčni utrip* in *Počitnice* je situacija *osebna*, saj gre za osebni resnični svet, kontekst pa predstavljata področje športa in zdravja v življenju aktivnega posameznika ter načrtovanje počitnic.

Naslednja komponenta, ki jo je treba upoštevati pri merjenju *matematične pismenosti*, je matematična vsebina, ki jo bo posameznik uporabil pri reševanju problemske naloge. Matematično vsebino v raziskavi PISA ilustriramo s štirimi *vsebinskimi sklopi*, ki so najpogostejše vsebovani v vsakodnevnih pojavih (in problemih, ki lahko iz njih nastanejo):

- *prostor in oblika*,
- *spremembe in odnosi*,
- *količina*,
- *negotovost*.

Vsebinski sklopi se nekoliko razlikujejo od matematičnih vsebin, ki so značilne za matematično poučevanje in učne načrte v šoli. Toda kljub temu opisane kategorije skupaj predstavljajo nekako obseg matematičnih vsebin, ki naj bi se jih učenci naučili za življenje. Vsebinski sklopi so predstavljeni zgoraj v velikem kvadratu v zgornjem desnem delu prikaza 2. Iz teh vsebinskih sklopov učenci črpajo matematične vsebine za reševanje problema. Te so predstavljene z manjšim kvadratom znotraj tega kvadrata.

Puščici, ki kažeta od *konteksta* in *matematične vsebine* k *problem*u, prikazujeta, kako ti dve komponenti resničnega sveta »ustvarita« problem.

Naloga *Srčni utrip* vključuje odnos oziroma odvisnost dveh spremenljivk, spremembo v odvisnosti in primerjavo dveh odvisnosti za izpeljavo odločitve. Zato ta problem sodi v vsebinski sklop *spremembe in odnosi*. Naloga *Počitnice* zahteva pri reševanju nekaj osnovnih računskih spretnosti in tudi analitično razmišljanje. Najprimernejši vsebinski sklop je zato *količina*.

Matematični procesi, ki jih učenci uporabljajo, ko poskušajo rešiti problem, so neposredno odvisni od matematičnih *kompetenc*, kar je skupna beseda za različne sposobnosti in zmožnosti za izpeljavo miselnih procesov, ki so potrebni za reševanje različnih tipov problemov. Trije *kompetenčni razredi* določajo raven oziroma stopnjo uporabe matematičnih procesov in kompetenc pri reševanju problemskih nalog v vsakdanjem življenju učencev in bodo podrobneje opisani pozneje.

Matematični procesi kot tretja komponenta *matematične pismenosti* so v prikazu 2 predstavljeni z velikim kvadratom spodaj, ki ga sestavljajo splošne matematične kompetence in procesi (kakršna je na primer *matematizacija*). Manjši kvadrat znotraj pa predstavlja tri kompetenčne razrede (glede na težavnostno stopnjo). Ker so nekatere kompetence potrebne za razumevanje postavljenega problema, nekatere za njegovo reševanje, druge pa se kažejo v rešitvi, je ta interakcija predstavljena s puščico, ki gre od *kompetenčnih razredov* k problemu in njegovi rešitvi.

V prikazu 2 je vrisana še puščica od razredov kompetenc do oblike problema. Kompetence, uporabljene pri reševanju problema, so namreč povezane z obliko problema in njegovimi natančnimi zahtevami.

Poudariti je treba, da imajo tri pravkar opisane komponente *matematične pismenosti* različno naravo. Situacija ali kontekst določa področje življenjskega problema in vsebinski sklopi izražajo način, s katerim gledamo na svet oziroma problem z »matematičnimi očali«, kompetence pa so bistvo *matematične pismenosti*. Le takrat, ko imajo učenci razvite določene kompetence, lahko uspešno rešijo dani problem. Vrednotenje *matematične pismenosti* vključuje merjenje matematičnih kompetenc, ki jih je posamezni učenec med šolanjem pridobil, in njihovo uspešno uporabo v problemih in različnih situacijah.

V naslednjih razdelkih so podrobneje opisane vse tri komponente *matematične pismenosti*.

Situacija ali kontekst

V ospredju *matematične pismenosti* je povezanost matematike z realnim svetom, torej uporaba matematike v različnih situacijah in kontekstih. Ugotovljeno je bilo, da so matematične metode in predstavitve pogosto odvisne od situacij, v katerih so problemi predstavljeni.

Situacija je del učenčevega sveta, v katerega so umeščene naloge oziroma problemi. Nekateri situacije so učencem bližje kot druge. V raziskavi PISA je učencu najbližja situacija kar učenčevo osebno življenje, sledijo mu šolsko življenje, delo in prosti čas, zatem pa družba in skupnost, s katerima se posameznik srečuje v vsakdanjem življenju. Najbolj je učencu oddaljen svet znanosti. Glede na to, kako blizu je posamezna situacija učencu, govorimo v raziskavi PISA o štirih različnih vrstah situacij, ki se uporabljajo za reševanje problemov:

1. osebna situacija,
2. izobraževalna oziroma poklicna situacija,
3. javna oziroma širše družbena situacija,
4. znanstvena situacija.

Znotraj določene situacije oziroma okolja je natančneje določeno in pojasnjeno področje, ki je predmet obravnave. Imenujemo ga kontekst in je navadno podan z opisom posamezne naloge. Naloga vključuje vse podrobnosti, ki so potrebne za natančno oblikovanje konteksta v danem problemu.

3. primer matematične naloge: VARČEVALNI RAČUN

1000 zedov položimo na varčevalni račun v banki. Obstajata dve možnosti: prva možnost, ki lahko prinese 4 odstotke letnih obresti; ali druga možnost, ko na račun dobimo 10 zedov od banke in 3 odstotke letnih obresti. Katera možnost je boljša po izteku enega leta? In katera po izteku dveh let?

Področje, na katero je postavljen ta problem, so finance in bančništvo, torej področje lokalne skupnosti in družbe, ki ju v raziskavi PISA klasificiramo kot *javno oziroma širše družbeno situacijo*. Iz naloge razberemo, da so v dani kontekst vključeni denar (zedi) in obresti na bančnem računu.

Taka vrsta problema bi lahko bila del resnične izkušnje posameznika v realnem življenju, zato tak kontekst imenujemo *avtentični* kontekst. Avtentični kontekst je pristen, predstavlja situacijo oziroma okolje, ki lahko nastopi v vsakdanjem življenju. V nasprotju z avtentičnimi problemi so v šolskih učbenikih pogosto problemi, katerih glavni namen je izvajanje rutinskih matematičnih operacij in ne uporaba matematike v realnem svetu. *Avtentičnost* v uporabi matematike je pomemben vidik oblikovanja in analize vprašanj v raziskavi PISA in je močno povezan z definicijo *matematične pismenosti*.

Moramo še dodati, da s pojmom »avtentični kontekst« ne označujemo nujno resničnega problema, temveč s tem pojmom le označimo, da se s takim ali podobnim problemom matematika lahko uporabi v realnem svetu, ne pa, da je namenjena sama sebi. Čeprav je dežela izmišljena in prav tako vrsta denarja, zahteva naloga uporabo matematičnih procesov, ki so enaki kot procesi pri reševanju resničnega problema. Izmišljena denarna enota zed se v nalogi uporablja zato, da učencem iz določenih držav ne omogoči nepravilne prednosti.

Situacijo in kontekst problema lahko delimo tudi glede na količino vključevanja matematičnih elementov v situacijo oziroma kontekst. Če se problem osredotoča samo na matematične predmete, simbole ali strukture in ne vključuje stvari zunaj matematičnega sveta, štejemo kontekst kot *popolnoma matematičen*, problemska situacija pa navadno pripada *znanstveni situaciji*. V raziskavo PISA je vključeno omejeno število takih nalog, v katerih je med problemom in matematiko tesna vez, ki je jasno razpoznavna že iz konteksta problema. Večinoma pa problemi, s katerimi se srečujejo posamezniki v vsakdanjem življenju, niso izraženi v matematični obliki. Kontekst v takih problemih se imenuje *oblikovno nematematičen* in učenec mora tedaj kontekst problema prevesti v matematično obliko. Na splošno gledano snovalci raziskave PISA poudarjajo vključitev realnih problemov, postavljenih v avtentični kontekst, ki omogoča realno rešitev in interpretacijo. To sicer ne izključuje vključitve nalog z izmišljenim kontekstom, če ima ta nekaj resničnih elementov, če ni preveč odmaknjen od resničnega sveta in pri katerem je uporaba matematike avtentična. 4. primer prikazuje problem z izmišljenim kontekstom, ki je *oblikovno nematematičen*.

4. primer matematične naloge: DENARNI SISTEM

Bi bilo mogoče vzpostaviti denarni sistem, ki bi temeljil samo na vrednostih 3 in 5? Bolj specifično, katere vrednosti bi lahko dosegli na tej podlagi? Bi bil tak sistem zaželen?

Kakovost tega problema ne izhaja iz njegove povezanosti z resničnim svetom, temveč iz dejstva, da je matematično zanimiv in za svojo rešitev zahteva kompetence, ki so tesno povezane z *matematično pismenostjo*. V danem problemu je uporaba matematike za razlago hipotetičnih scenarijev in raziskovanje mogočih sistemov oziroma situacij (čeprav obstaja malo možnosti, da se v resničnem svetu zgodijo) ena izmed najpomembnejših komponent. Tak problem sodi v *znanstveno situacijo*.

Če povzamemo, raziskava PISA namenja veliko pozornosti problemom in vprašanjem, ki jih srečamo v različnih življenjskih situacijah in v katerih je kontekst za uporabo matematike pri reševanju avtentičen. Problemi z *oblikovno nematematičnim* kontekstom, ki vplivajo na rešitev in njeno interpretacijo, so za vrednotenje *matematične pismenosti* v raziskavi PISA bolj priljubljeni, ker jih pogosteje srečujemo v vsakdanjem življenju.

MATEMATIČNA VSEBINA - ŠTIRJE VSEBINSKI SKLOPI

Matematični pojmi, strukture in zamisli se uporabljajo kot orodje za organizacijo naravnega, socialnega in miselnega (mentalnega, duhovnega) sveta. V šolah je učni načrt matematike logično organiziran okoli običajnih matematičnih vsebin, kot so aritmetika, algebra in geometrija, ter natančneje opredeljenih snovi znotraj teh, ki so povezane z zgodovinskim razvojem matematične misli in ki omogočajo strukturiran način poučevanja. V resničnem svetu pa pojavi, ki zahtevajo matematično razmišljanje, niso tako logično organizirani. Zelo redko se pojavljajo problemi, ki zahtevajo uporabo znanja ene same omenjene matematične vsebine. Po navadi je pri reševanju nekega problema treba uporabiti različna matematična področja.

Cilj raziskave PISA je ovrednotiti učenčevo sposobnost reševanja resničnih problemov, zato je bil glavni cilj snovalcev raziskave PISA 2003 določiti obseg vsebin in ključne dejavnike, ki se bodo uporabljali za opisovanje in vrednotenje vsebin, nujnih za reševanje realnih problemov. To pomeni opisati vsebine v povezavi s pojavi in problemi, za katere so bile ustvarjene. Ta pristop zagotavlja vrednotenje, ki je skladno z definicijo *matematične pismenosti*, hkrati pa pokriva razpon vsebin, ki so najpogostejše zastopane v nacionalnih učnih načrtih in jih največkrat preverjajo v šolskih matematičnih preizkusih znanja.

Organizacija matematičnih vsebin glede na pojavnost v problemih in fenomenih ni nova. Dve dobro znani publikaciji *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (Steen, 1990) in *Mathematics: The science of patterns* (Devlin, 1994) sta predstavili vsebino matematike podobno. Nov vsebinski pristop se je sicer v obeh primerih imenoval drugače, pa tudi imenovanja za določene kategorije so bila drugačna. Predlogi za poimenovanje teh pojavnih kategorij so vsebovali pojme, kot so globoke ideje, velike ideje, temeljne ideje, glavne vsebine, krovni pojmi, krovne ideje, vsebinski sklopi itn. Za namen raziskave PISA bomo v slovenskem jeziku uporabili pojem vsebinski sklopi.

Strokovnjaki omenjajo več matematičnih vsebinskih sklopov. V prej omenjenih publikacijah se navajajo pojmi, kot so vzorec, razsežnost, količina, negotovost, oblika, sprememba, štetje, pojasnjevanje in komuniciranje, premikanje in spremembe, simetrija in položaj. Katera izmed teh naj se uporabi v merjenju *matematične pismenosti*? Snovalci raziskave PISA so naredili izbor problemskih področij, ki izhajajo iz zgodovinskega razvoja v matematiki, toda vseeno vključujejo zadostno raznolikost in globino za odkrivanje bistva matematike, hkrati pa predstavljajo ali vključujejo vpeljane matematične učne standarde.

Stoletja je bila matematika v glavnem znanost števil, skupaj z razmeroma »oprijemljivo« geometrijo. V obdobju do 500 let pred našim štetjem so v Mezopotamiji, Egiptu in na Kitajskem razvili pojem števil. Postopoma so razvili operacije s številkami in količinami, vključno s količinami, ki so jih dobili z

geometrijskimi merjenji. Obdobje od 500 let pred našim štetjem do 300 let našega štetja je bilo obdobje grških matematikov, ki so se posvečali predvsem študiju geometrije kot aksiomatični teoriji. Grki so pravzaprav definirali matematiko kot enotno znanost števil in oblik. Naslednja velika sprememba se je zgodila v obdobju med letoma 500 in 1300 v islamskem svetu, Indiji in na Kitajskem. V tem času se je kot veja matematike razvila algebra, ki je bila podlaga za študij odnosov. Z neodvisnimi izumi Newtona in Leibniza v 17. stoletju, ki sta posredovala številne izračune sprememb, rasti in omejenosti (limit), je matematika postala povezan študij števil, oblik, sprememb in odnosov.

V 19. in 20. stoletju je prišlo do eksplozije matematičnega znanja in do novih področij pojavov in problemov, ki jih je bilo mogoče rešiti s pomočjo matematike. Ti pojavi in problemi so vključevali naključja in nedoločenost. Nova področja so otežila dati preprost odgovor na vprašanje Kaj je matematika?.

Na začetku novega tisočletja mnogi vidijo matematiko kot znanost vzorcev (v splošnem smislu). Lahko naredimo izbor matematičnih vsebinskih sklopov, ki kažejo ta razvoj: vzorci v *količini*, vzorci v *prostoru in oblikah*, vzorci v *spremembah in odnosih* sestavljajo bistvene pojme za opis matematike in so bistvo vsakega učnega načrta. Vendar *matematična pismenost* pomeni več. Ukvarjanje z negotovostjo z matematičnega in znanstvenega stališča je nujno, zato elementi verjetnostne teorije in statistike poudarjajo četrti vsebinski sklop *negotovost*.

Vsebinski sklopi, uporabljeni v raziskavi PISA 2003 in 2006, ki naj bi zadostili zgodovinskemu razvoju in ki naj bi pokrivali *matematično pismenost* ter zadostili splošnim značilnostim šolskega učnega načrta, so torej:

1. *količina*,
2. *prostor in oblika*,
3. *spmembe in odnosi*,
4. *negotovost*.

S temi štirimi vsebinskimi sklopi je matematična vsebina razdeljena v zadostno število področij, kar omogoča porazdelitev nalog skladno z učnim načrtom, hkrati pa je to število dovolj majhno, da se pri proučevanju lahko osredotočimo na probleme, ki izhajajo iz resničnega sveta (in dobimo zadostno število nalog vsakega vsebinskega sklopa).

Za vsakega izmed vsebinskih sklopov lahko najdemo vrsto situacij oziroma področij, v katerih se pojavljajo. Vsak vsebinski sklop ima že v svojem imenu vsebino, ki ima v matematiki zelo širok pomen in uporabo. Seveda pa ti vsebinski skopi niso nepovezani in tudi ne izolirani od značilnih vsebinskih sklopov, ki jih učijo v šolah. Pravzaprav ima vsak vsebinski sklop bistvo, ki omogoča povezavo z drugimi vsebinskimi sklopi, ki so opisani v naslednjih odstavkih.

Količina

Da bi lahko organizirali svet, v katerem živimo, obstaja velika potreba po kvantifikaciji – po izražanju tega, kar je veliko ali majhno, kar je visoko ali nizko, mnogo ali malo, več ali manj. Ko stvari okoli sebe štejemo in urejamo po velikosti, jih vzorčimo: petero ali pet imenujemo nekaj, kar je skupnega zbirki petih jabolk, petih ljudi, petih avtomobilov. Števila 1, 2, 3 ..., ki jih uporabljamo za štetje, so način opisovanja teh vzorcev. Ta števila nam omogočajo računanje in so vir iskanja globljih vzorcev, kot so soda in liha števila.

Vendar pa števila, ki jih uporabljamo za štetje, niso nujno prvi fenomenološki pojav, s katerim se srečajo majhni otroci. Otroci prepoznajo »malo« in »veliko« tako pri predmetih različnih velikostih (velik piškot, majhen piškot) kot pri zbiranju različne količine predmetov (trije predmeti, sedem predmetov), ne da bi znali šteti oziroma poznali števila.

Pomembni dejavniki vsebinskega sklopa *količina* so: razumevanje pojma števil, relativne velikosti, prepoznavanje številskih vzorcev in uporaba števil kot mera za merljive objekte realnega sveta (kar sodi v vsebino učnega načrta »štetje in merjenje«). Prav tako h *količini* sodijo navajanje na števila in razumevanje števil, ki so nam predstavljena različno, različni številski procesi in metode.

V realnih problemih pri merjenju največkrat naletimo na dolžino, ploščino, prostornino, težo, hitrost, maso, zračni tlak in vrednost denarja. Vse to so kvantitativne količine, ki jih najpogosteje merimo v vsakdanjem življenju.

Pomemben vidik *količine* je količinsko razmišljanje. Glavne sestavine količinskega razmišljanja so:

- občutek za števila (smiselnost števil, predstavitev števil na različne načine),
- razumevanje pomena računskih operacij,
- občutek za velikost števil,
- sposobnost ocenjevanja,
- miselna aritmetika,
- spretno računanje.

Občutek za števila potrebujemo za prikaz relativne velikosti, različne predstavitev števil, zapis ekvivalentnih oblik števil in njihovo uporabo za opis dejavnikov realnega sveta.

Razumevanje pomena računskih operacij vključuje sposobnost, da v pravem trenutku in na pravem mestu prikažemo in uporabimo računske operacije, ki vključujejo primerjavo, razmerje in odstotke.

Vsebinski sklop *količina* vsebuje tudi učenčev občutek za velikost števil in seveda za merjenje. Da lahko ugotovimo, ali je neki rezultat smiseln, moramo imeti široko

znanje o količini oziroma merjenju realnega sveta. Ali je povprečna hitrost avtomobila 5,50 ali 500 km/h? Je število ljudi na svetu 6 milijonov, 600 milijonov, 6 milijard ali 60 milijard? Kako visok je stolp? Kako široka je reka? Pri teh vprašanjih pride v ospredje tudi sposobnost oziroma zmožnost hitrega ocenjevanja.

Sposobnost ocenjevanja reda velikosti je zelo pomembna, še posebej zaradi vse večje uporabe elektronskih pripomočkov za računanje. Sposobni moramo biti oceniti, ali je na primer vrednost $33 \cdot 613$ nekje okoli 20 000. Da pridobi učenec to spretnost, ne potrebuje posebnega dolgotrajnega vadenja, pa tudi ne pisanja kakšnih tradicionalnih algoritmov, temveč le zmožnost fleksibilne in smiselne uporabe ter dobre prostorske predstave števil in preproste aritmetike (Fey, 1990).

S pravilno uporabo števil lahko učenci rešijo probleme, ki zahtevajo premo, obratno ali mešano razmerje. Lahko ocenjujejo razmerje menjalniškega tečaja in izberejo pravi rezultat ter stopnjo natančnosti pri operacijah oziroma izvedenih modelih. Lahko naredijo nove algoritme ter pokažejo, kdaj delujejo in kdaj ne. Lahko razvijejo modele, ki vključujejo operacije ali razmerja med operacijami za probleme, ki vsebujejo realne podatke (Dossey, 1997). Vse to predstavlja *miselno aritmetiko*, torej miselne procese in izvedene operacije s količinami in števili.

V vsebinskem sklopu *količina* je prostor tudi za *spretno računanje*, ki je predstavljeno v naslednjem primeru.

5. primer matematične naloge: GAUSS

Učitelj Karla Friedricha Gaussa (1777–1855) je od učencev zahteval, da seštejejo vse številke od 1 do 100.

Najverjetneje je učitelj za nekaj časa želel zaposliti učence. Vendar pa je Gauss znal odlično količinsko razmišljati in je hitro ugotovil, da do rešitve lahko pride po krajši poti. Njegovo sklepanje je bilo tako:

Vsoto napišemo dvakrat, enkrat v naraščajočem in enkrat v padajočem vrstnem redu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Nato seštejemo obe vsoti, tako da seštevamo sumande po stolpcih in dobimo

$$101 + 101 + \dots + 101 + 101.$$

Ker je v tej vsoti natančno 100 kopij števila 101, je končna vrednost enaka

$$100 \cdot 101 = 10100.$$

Ker je to dvakratna vrednost iskane vsote, jo razpolovimo in dobimo rezultat 5050.

Formulo za splošno rešitev Gaussovega problema

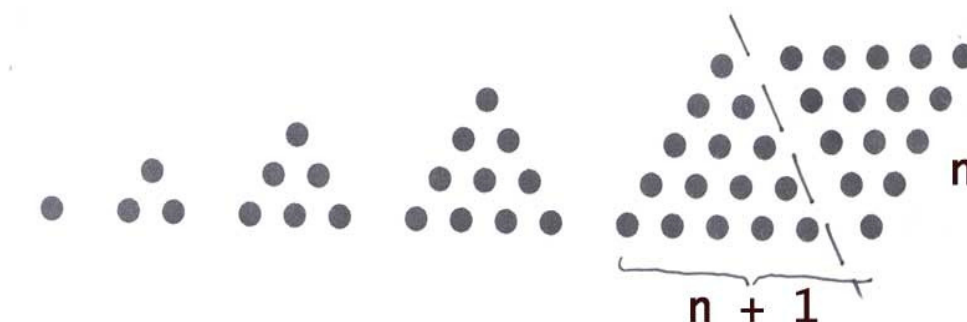
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

lahko uporabimo tudi za razlago t. i. *trikotniških števil*.

Vsota na desni strani formule $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$ predstavlja geometrijski vzorec, ki je dobro znan. Števila $n(n+1)/2$ se imenujejo *trikotniška števila*, kajti to so števila, ki jih dobimo z razporeditvijo kroglic v enakostraničnem trikotniku. Trikotniška števila so rezultat razmišljanja o količini. Poleg splošne izpeljane vsote n števil v nalogi *Gauss* vključujejo vzorčenje teh števil, ki jih lahko podrobneje analiziramo in prikažemo povezavo z geometrijskimi predstavitvami tega vzorca.

Prvih pet trikotniških števil je enakih 1, 3, 6, 10, in 15 narisanih v prikazu 3.

Prikaz 3: Prvih pet trikotniških števil



Zanimivo si je ogledati, kako učenci v različnih državah rešujejo probleme, ki jih je mogoče rešiti različno. Razlike je mogoče pričakovati predvsem na področju *sorazmerja*. V nekaterih državah se v glavnem uporablja en način reševanja posamezne naloge, v drugih državah pa se za reševanje iste naloge uporablja več različnih načinov. Lahko pa se pojavijo podobnosti v načinu sklepanja pri reševanju problemov, ki sicer ne kažejo podobnosti. To se je pokazalo pri analizi rezultatov raziskave TIMSS (Mitchell, J. *et al.*, 2000). Naslednje tri naloge ilustrirajo obstoj različnih načinov reševanja in povezav med njimi.

6. primer matematičnih nalog iz SORAZMERJA

Primer 6.1 Danes zvečer boš organiziral zabavo. Želiš kupiti 100 pločevink brezalkoholne pijače. Koliko zabojev po šest pločevink boš kupil?

Primer 6.2 Jadralka z jadrlnim razmerjem 1 proti 22 se spusti z 120 metrov visoke pečine. Jadralka cilja na točko, oddaljeno 1400 metrov. Bo dosegla to točko (pod pogoji, da je brezvetrje)?

Primer 6.3 Šola želi za odhod na šolski tabor najeti manjše avtobuse (s sedeži za osem potnikov) za 98 učencev. Koliko takšnih avtobusov potrebuje šola?

Na prvi primer lahko gledamo kot na nalogo deljenja ($100 \div 6 =$), ki od učenca želi tudi razlago rezultata, glede na dano sobesedilo. Od učencev naloga zahteva poznavanje pomena ostanka pri deljenju glede na dano situacijo. Drugi problem lahko rešimo s sorazmernostnim sklepanjem: »Pri vsakem metru višine jadralka

lahko preleti razdaljo 22 metrov, če torej začne pri 120 metrih ...». Tretji problem veliko učencev rešuje kot problem deljenja, tako kot prvi problem. Vse tri probleme je mogoče rešiti tudi z uporabo metode razmerja:

Pločevinke:	1	10	5	15	2	17
	6	60	30	90	12	102

Letenje:	1	100	20	120
	22	2200	440	2640

Manjši avtobusi:	1	10	2	13
	82	80	16	104

Uvideti podobnost je večšina, ki prav tako sodi v *matematično pismenost*. Matematično pismenim učencem ni treba iskati enega dostopnega in ustreznega orodja ali algoritma, temveč jim je dostopen širok razpon načinov reševanja, med katerimi lahko izbirajo.

7. primer matematične naloge: ODSOTKI

Ciril je šel v trgovino kupit jakno, ki po redni ceni stane 50 zedov, vendar je trenutno znižana za 20 odstotkov. V Zedlandiji imajo 5-odstotni prodajni davek. Prodajalec je ceni jakne najprej dodal 5-odstotni davek, nato pa odštel 20 odstotkov. Ciril se s tem ni strinjal: želel je, da prodajalec ceno najprej zniža za 20 odstotkov in nato prišteje 5-odstotni davek.

Ali je v ceni kakšna razlika?

S problemi, ki vključujejo tako vrsto količinskega razmišljanja, kakršno je zahtevano v 7. primeru, in pri katerih je treba izvesti miselne računske operacije, se pogosto srečujemo pri nakupovanju. Sposobnost učinkovitega reševanja takih problemov je bistvenega pomena za *matematično pismenost*.

Prostor in oblika

Vzorci srečamo povsod: v izrečenih besedah, glasbi, filmu, prometu, stavbah in umetnosti. Vzorce prepoznamo tudi v oblikah. Vzorce namreč lahko predstavljajo oblike hiš, pisarn, mostov, morskih zvezd, snežink, načrtov mest, listov česnovega stroka, kristalov in senc. Geometrijski vzorci lahko služijo kot razmeroma preprosti modeli različnih pojavov, njihovo proučevanje pa je mogoče in tudi zaželeno na vseh ravneh (Grünbaum, 1985). *Prepoznavanje oblik in vzorcev* je torej temeljna dejavnost vsebinskega sklopa *prostor in oblika*.

Pomembno je, da učenci razumejo lastnosti geometrijskih vzorcev, oblik in različnih prostorskih objektov. Poučeni morajo biti o tem, kako in zakaj vidijo stvari tako, kot jih. Naučiti se morajo gibanja po prostoru oziroma »brati« in uporabljati prostorske

skice, konstrukcije ipd. Pravzaprav morajo razumeti povezavo med pravim prostorom in geometrijsko sliko, ki ga predstavlja, med pravim mestom in njegovim načrtom ali fotografijo. Vedeti morajo, kako trirazsežni prostor predstaviti v dvorazsežnem, razumeti nastanek senc in jih skicirati, razložiti, kako narisati neko stvar v različnih perspektivah ter slike tudi uporabiti za reševanje različnih problemov.

Pojem oblika je močno povezan z geometrijo, ki je sestavni del učnih načrtov matematike, vendar je na določenih področjih vsebinsko, metodično in miselno širše zastopan od geometrije. Soočanje z resnično obliko nekega telesa zahteva razumevanje vidnega sveta, njegov opis, kodiranje ali dekodiranje zaznanih vizualnih informacij in prav tako pojasnjevanje posameznikovih vizualnih informacij. Da bi učenci dobili temeljno znanje *opisovanja, kodiranja in dekodiranja vizualnih informacij*, morajo dobiti znanje o podobnosti in raznolikosti objektov, morajo biti sposobni analizirati različne komponente objekta in prepoznati oblike v različnih razsežnostih ter prepoznati njihove različne reprezentacije.

Oblike pa seveda lahko spreminjamo ali preoblikujemo. *Razumevanje dinamičnih sprememb oblik* je danes z uporabo računalniške tehnologije veliko preprostejše. Učenci naj bi bili pri takem spreminjanju ali preoblikovanju sposobni videti vzorce in pravila za spreminjanje. To ponazarja slika v primeru 8.1.

Študij oblik in konstrukcij zahteva iskanje ter zaznavanje *podobnosti in razlik*, ko analiziramo komponente oblik in jih prepoznavamo v različnih predstavitvah in različnih razsežnostih. Študij oblik je tesno povezan s konceptom »dojemanja prostora«. To pomeni učenje spoznavanja, raziskovanja in osvajanja, da bi lahko z več razumevanja živeli, dihal in se premikali v prostoru, v katerem živimo (Freudenthal, 1973). Problemov, ki zahtevajo tako znanje in sposobnosti, je veliko. Primerjati fotografijo mesta z mestnim načrtom, ugotavljanje, s katerega zornega kota je fotografija posneta, zmožnost skiciranja načrta oziroma zemljevida po fotografiji, razumevanja, zakaj so stavbe blizu videti višje od tistih daleč zadaj, zakaj se tira železniške proge navidezno stakneta, ko dosežeta horizont ... Vse to sodi v vsebinski sklop *prostor in oblika*.

Učenci živijo v trirazsežnem prostoru, zato morajo biti seznanjeni s pogledi na predmete v tem prostoru (tloris, naris, stranski ris). Morajo biti seznanjeni s prednostmi in pomanjkljivostmi vsakega izmed teh pogledov na objekt, kot je to prikazano v primeru 8.2. Ni dovolj le *prepoznavanje relativne lege objekta*, objekt morajo znati premikati po prostoru oziroma po skici ali načrtu (*navigirati*), spoznati faze njegove konstrukcije in slediti spremembam v obliki. Primer za to so branje in interpretacija načrta ter oblikovanje navodil, kako priti od ene točke do druge z uporabo koordinat, jezikovno in s sliko.

Celovito razumevanje oblik vsebuje tudi zmožnost iz danega objekta v trirazsežnem prostoru napraviti dvorazsežno mrežo in obratno, čeprav je trirazsežni objekt narisani v dvorazsežnem prostoru (primer 8.3). *Poznati dvo- in trirazsežne predstavitve objektov in odnose med njimi* je tudi pomemben del matematičnega učnega načrta v šolah.

Opisali smo ključne dejavnike *matematične pismenosti*, ki se nanašajo na vsebino *prostor in oblika*, in sicer:

- *prepoznavanje oblik in vzorcev,*
- *opisovanje, kodiranje in dekodiranje vizualnih informacij (slikovnega gradiva),*
- *razumevanje dinamičnih sprememb oblik,*
- *zaznavanje podobnosti in razlik,*
- *prepoznavanje relativne lege objekta,*
- *znati se gibati po prostoru oziroma po skici ali načrtu (navigacija)*
- *poznati dvo- in trirazsežne predstavitve objektov ter odnose med njimi.*

Naslednja naloga je preprost primer opazovanja spreminjanja oblike objekta.

8. primer matematičnih nalog

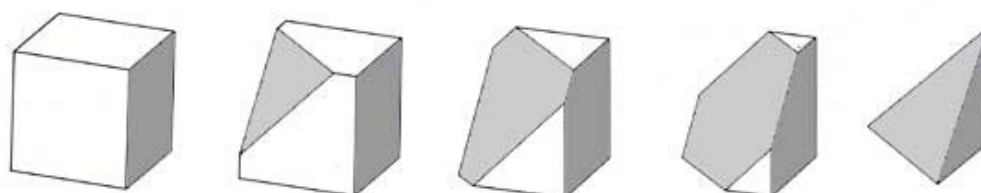
Primer 8.1

Slika 8.1 prikazuje kocko, ki jo »režemo«.

Kakšne oblike lahko nastanejo z enim ravnim rezom skozi kocko?

Koliko stranic, robov ali vodoravnih nastane, če kocko režemo tako?

Slika 8.1: Kocka z ravnimi rezi na različnih delih



Naslednji trije primeri zahtevajo seznanjenost z različnimi predstavitvami objektov trirazsežnega prostora.

Primer 8.2

Na sliki 8.2 je prikazan stranski pogled (stranski ris) in sprednji pogled (naris) na predmet, sestavljen iz kock.

Koliko kock je uporabljeno za izdelavo tega predmeta?

Slika 8.2: Stranski in sprednji pogled predmeta, narejenega iz kock



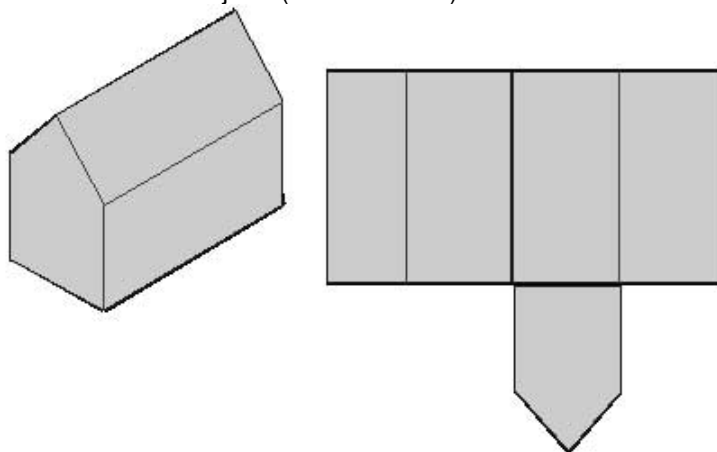
Številni učenci in učitelji bodo presenečeni, da je maksimalno število kock 20, minimalno pa 6 (de Lange, 1995).

Naslednji primer sta dvorazsežni prikaz skednja in nedokončana mreža skednja. Učenec mora dokončati mrežo skednja.

Primer 8.3

Na sliki 8.3 sta dvorazsežni prikaz skednja in nedokončana mreža skednja. Dokončaj mrežo skednja.

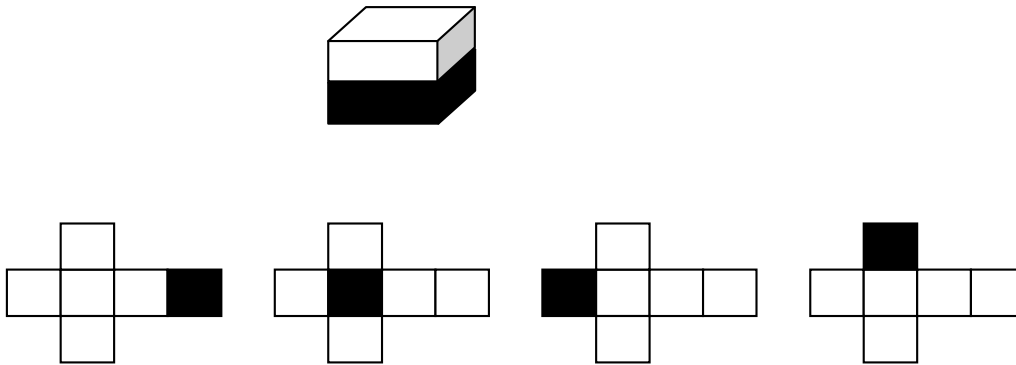
Slika 8.3: Dvorazsežna predstavitev kmetije v trirazsežnem prostoru in njena (nedokončana) mreža



Primer 8.4

Na sliki 8.4 je spodnja polovica kocke prebarvana s črno barvo. Za vse štiri mreže je spodnji del že pobarvan črno. Dokončajte barvanje vsake posamezne mreže tako, da osenčite prave dele kvadratkov.

Slika 8.4: Kocka s črnim dnom



Spremembe in odnosi

Vsak naravni pojav je prikaz sprememb. Svet okoli nas predstavlja ogromno množico povezav med pojavi, ki so lahko trenutne ali pa se ponavljajo. Primer so organizmi, ki se spreminjajo, ko rastejo, letni časi, plima in oseka, vremenske spremembe, spremembe na borzi vrednostnih papirjev, cikli brezposelnosti itn. Nekateri izmed teh procesov se lahko predstavijo z značilno matematično zvezno ali diskretno funkcijo: linearno, eksponentno, periodično ali logistično. Toda veliko sprememb in povezav lahko predstavimo z več funkcijami, zato je potrebna analiza podatkov, da pojasnimo izbrano zvezo. Matematične povezave imajo pogosto obliko enačbe (s katerimi popisujemo funkcije) ali neenačbe, lahko pa imajo tudi bolj splošno obliko (ekvivalence, izjave ipd).

Da bi lahko ugotavljali vzorce danih sprememb, Stewart (1990) predlaga, da

- predstavimo spremembe razumljivo,
- razumemo osnovne vrste spreminjanja,
- prepoznamo določene vrste sprememb, ko se pojavijo,
- znamo uporabiti navedene tehnike v zunanjem svetu,
- nadzorujemo spreminjajoči se svet v našo korist.

Spremembe in povezave so lahko prikazane različno: numerično (na primer s tabelo), simbolično, grafično, algebraično ali geometrijsko. Učenci morajo znati izbrati in predstaviti spremembe razumljivo, ključnega pomena za to pa je tudi prehod med navedenimi prikazi.

Izrednega pomena sta tudi prepoznavanje in razumevanje osnovnih vrst spreminjanja in odvisnosti. Učenci se morajo zavedati pojma linearne rasti (proces seštevanja), eksponentne rasti (proces množenja), periodične kot tudi logistične rasti, vsaj neformalno kot posebnega načina eksponentne rasti. Učenci morajo videti tudi povezave med navedenimi vrstami sprememb, na primer ključne razlike med

linearno in eksponentno rastjo; dejstvo, da je odstotna rast identična eksponentni rasti; kako se pojavlja logistična rast in zakaj, tako v zveznih kot v diskretnih situacijah ipd.

Spremembe navadno nastanejo v nekem sistemu objektov ali pojavov, ki vplivajo drug na drugega različno. V nekaterih primerih so vsi pojavi odvisni od časa. V veliko primerih v realnem svetu pa so te odvisnosti bolj celovite. Pomembno je, da mladi *prepoznajo določene vrste sprememb, ko se pojavijo, in, seveda, da jih znajo uporabiti v zunanjem svetu*. Navajamo primera.

Če kitarško struno po dolžini razpolovimo, je novi ton za oktavo višji od originalnega tona. Ton je zato odvisen od dolžine strune.

Ko denar položimo na bančni račun, vemo, da bosta denarni priliv in odliv odvisna od količine položenega denarja, števila plogov in dvigov, časa in obrestne mere.

Spremembe prikazujejo povezavo vsaj dveh količin. Povezave vodijo v odvisnost. Odvisnost pa pomeni, da lastnosti in spremembe določenih matematičnih objektov vplivajo na lastnosti in spremembe drugih matematičnih objektov. Matematične povezave imajo pogosto obliko enačb ali neenačb, lahko pa se pojavijo tudi povezave bolj splošne narave. *Spremembe in odnosi* zahtevajo funkcionalno razmišljanje, torej razmišljanje o povezanosti. Funkcionalno razmišljanje je eno izmed osnovnih ciljev poučevanja matematike (MAA, 1923). Za 15-letnike sposobnost funkcionalnega razmišljanja pomeni imeti občutek za stopnjo spremembe, hitrost spreminjanja in velikost odvisnosti ene spremenljivke od druge. Sposobni morajo biti presoje o tem, kako hitre so spremembe (tudi v relativnem smislu). Le takšno funkcionalno razmišljanje omogoča *nadzorovanje spreminjajočega se sveta v našo korist*.

Matematična vsebina *spremembe in odnosi* se tesno povezuje z drugimi matematičnimi vsebinami. Proučevanje vzorcev števil, ki sodi v *količino*, lahko vodi do zanimivih odnosov. Znana primera sta *Fibonaccijeva števila* in *zlati rez*. *Zlati rez* je razmerje števil, ki ima pomembno vlogo tudi v geometriji. Številne druge primere *sprememb in odnosov* lahko najdemo v *prostoru in obliki*; določene ploščine likov so odvisne od njihovega premera. Evklidska geometrija omogoča študijo teh odnosov. Dobro znan primer je odnos med tremi stranicami trikotnika. Če je dolžina dveh stranic znana, tretja pa ni določena, lahko določimo interval, v katerem je dolžina tretje stranice. Mejni vrednosti intervala sta absolutna vrednost razlike med znanima dolžinama stranic in njuno vsoto. V trikotniku bi našli še veliko drugih odnosov.

Tudi *negotovost* dopušča različne probleme, na katere lahko gledamo v luči *sprememb in odnosov*. Če vržemo dve igralni kocki in ena pokaže štiri, kolikšna je možnost, da bo vsota obeh prikazanih števil sedem? Odgovor dobimo s pogojno verjetnostjo. Iskana verjetnost je delež vseh ugodnih izidov, primerjanih z vsemi mogočimi izidi, kar je funkcionalna odvisnost.

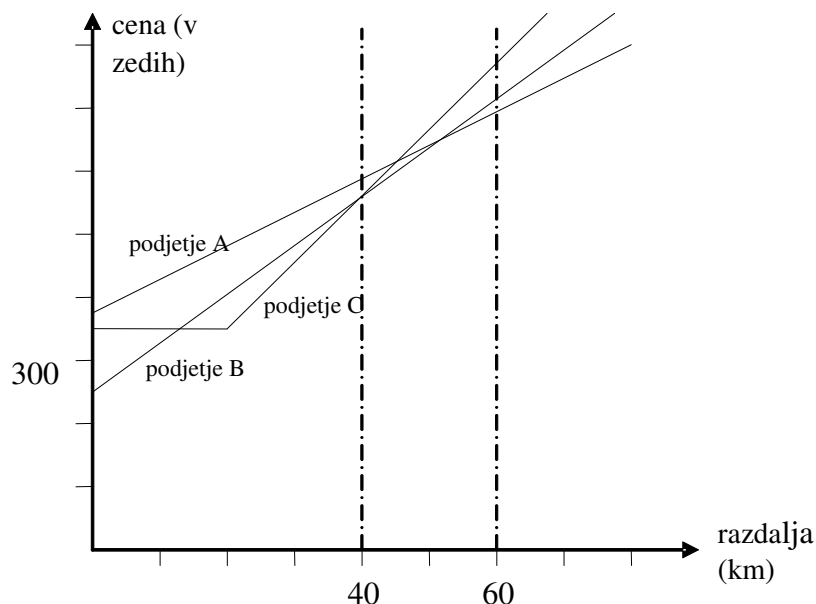
9. primer matematične naloge: ŠOLSKI IZLET

Šolski razred želi za izlet najeti avtobus, zato se učenci tega razreda pri treh podjetjih pozanimajo o cenah najema. V podjetju A je osnovna cena 375 zedov in še 0,5 zeda za vsak prevožen kilometer. V podjetju B je osnovna cena 250 zedov in še 0,75 zeda za vsak prevožen kilometer. V podjetju C računajo 350 zedov za 200 prevoženih kilometrov, in še 1,02 zeda za vsak prevožen kilometer nad 200 kilometrov.

Katero podjetje naj šolski razred izbere, če je celotna razdalja izleta približno med 400 in 600 kilometri?

Grafična predstavitev problema je predstavljena na sliki 9.1.

Slika 9.1: Cene izleta treh različnih podjetij



10. primer matematične naloge: RAST CELIC

Zdravniki spremljajo rast celic. Še posebno jih zanima dan, ko bo število celic doseglo 60 000, ker morajo takrat začeti eksperiment. Tabela z rezultati je takšna:

čas (dnevi)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
celice	597	893	1339	1995	2976	2976	14 719	21 956	32 763

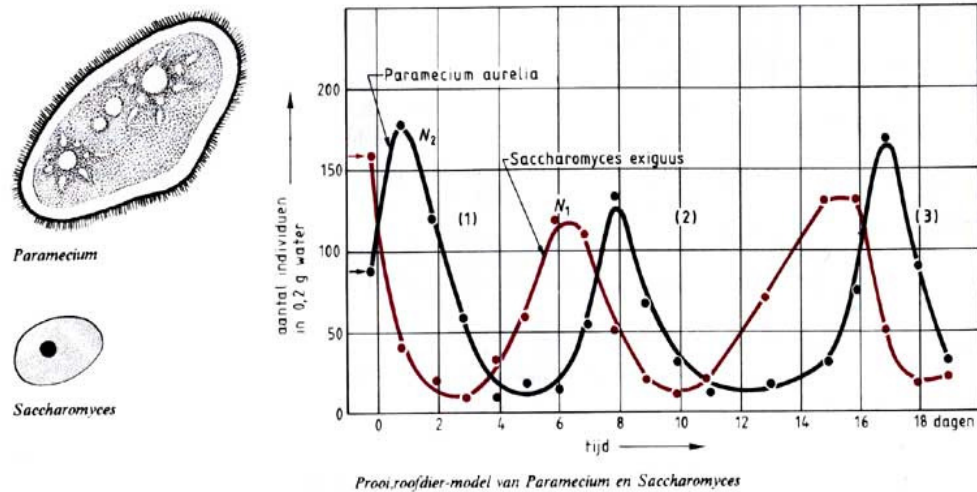
Kdaj bo število celic doseglo vrednost 60 000?

11. primer matematične naloge: PLEN – NAPADALEC

Spodnji graf prikazuje rast dveh živih organizmov: paramecija (ang. paramecium) in kvasovke (ang. saccharomyces).

Ena izmed obeh živali (napadalec) poje drugo (plen). Če si ogledaš graf, ali lahko ugotoviš, katera žival je plen in katera je napadalec?

Slika 11.1: Prooi-roofcherjev model paramecija in kvasovke



Ena izmed lastnosti pojava plenilstva se glasi: razmerje rasti plenilca je sorazmerno številu dostopnega plena. Ali je to res v primeru, ki ga prikazuje zgornji graf?

Opomba: Prevod besed iz slike 11.1

Paramecium – paramecij, Saccharomyces – kvasovka, dagen – dnevi, aantal individuen in 0,2 g water – delež osebkov v 0,2 g vode

Negotovost

Danes informacijska družba ponuja zelo veliko informacij, ki so pogosto predstavljene kot natančne, znanstvene in z visoko stopnjo gotovosti. Vendar pa se srečujemo tudi z nezanesljivimi rezultati volitev, z mostovi, ki se zrušijo, s padcem vrednosti na borzah, z nezanesljivimi vremenskimi napovedmi, slabimi napovedmi rasti populacije in številnimi drugimi negotovostmi našega sveta.

Znanost in tehnologija se redko ukvarjata z gotovostjo. Znanost se ukvarja z ugotavljanjem, kako svet deluje, do stopnje, do katere ji to uspeva. Podobno je tudi z našo sposobnostjo, da opisujemo, kaj se je zgodilo v preteklosti in natančno napovedujemo to, kar se še bo zgodilo v prihodnosti. Naravoslovno znanje je redko, če sploh kdaj, absolutno. Včasih se zgodi, da je celo napačno, tako da celo v znanstvenih napovedih ostaja določena negotovost.

Pri besedi negotovost takoj pomislimo na podatke in naključje. Ta dva pojma pa sodita k statistiki in verjetnostnemu računu. Mnoge organizacije v zadnjih letih v poročilih predlagajo, da bi bil potreben veliko večji poudarek na statistiki in verjetnostnem računu in da bi ta dva vsebinska sklopa morala imeti v učnih načrtih pomembnejšo vlogo (*Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Pravzaprav je cilj učenja o podatkih in naključju pridobiti sposobnost inteligentnega ukvarjanja z raznolikostjo in negotovostjo. Raznolikost je pojem, s katerim se je težko soočiti. Otroci, ki začnejo izobraževanje s črkovanjem in množenjem, pričakujejo, da

bo svet determinističen; hitro se naučijo pričakovati, da je en odgovor pravilen, drugi pa so napačni, vsaj kadar so odgovori v numerični obliki. Raznolikost oziroma variabilnost je nepričakovana in neudobna.

Specifični matematični pojmi in vsebine, ki so pomembni na področjih podatkov in naključij, so:

- *zbiranje podatkov,*
- *obdelava podatkov in prikazovanje podatkov (in rezultatov),*
- *verjetnost,*
- *sklepanje.*

V šolskih učnih načrtih osnovnih in srednjih šol je med naštetimi vsebinami največji poudarek na obdelavi podatkov. Rezultat tega je, da je statistika videti kot precej preprosta zbirka specifičnih spretnosti. David S. Moore je v svojih delih izpostavil, o čem zares govori matematična vsebina *negotovost*. Snovalci raziskave PISA sledijo njegovim zamislim, kot so predstavljene v delu *On the Shoulders of Giants* (Steen, 1990) in delu F. Jamesa Rutherforda *Why Numbers Count* (Steen, 1997).

Statistika k poučevanju matematike prispeva nekaj, kar je unikatno in pomembno, namreč sklepanje iz negotovih empiričnih podatkov. Statistika se v nižjih razredih ne poučuje zaradi statistike, temveč zato, ker je to učinkovit način razvijanja količinskega razumevanja in sklepanja ter uporabe aritmetike pri reševanju problemov. Taka vrsta statističnega razmišljanja bi morala biti del miselne sposobnosti vsakega inteligentnega posameznika. Glavni elementi statističnega razmišljanja so:

- *navzočnost raznolikosti (variabilnosti) v procesu,*
- *potreba po podatkih o procesu,*
- *načrtovanje načina pridobivanja podatkov glede na njihovo raznolikost,*
- *merjenje raznolikosti,*
- *razlaga raznolikosti.*

Statistično razmišljanje mora biti navzoče v vsaki izmed naštetih vsebin vsebinskega sklopa *negotovost*. Poskušajmo kratko opisati, kako se kaže pri teh vsebinah.

Zbiranje podatkov o pomembnih problemih ni lahka naloga. Za namen raziskave PISA na primer morajo biti podatki zanimivi, pomembni in uporabni ter morajo učencem nekaj pomeniti. Podatki niso le številke, temveč številke v kontekstu, številke, ki imajo svoj pomen. Podatke pridobimo z merjenjem določenih lastnosti in jih predstavimo s številkami, zato je *treba podatke o procesu* skrbno proučiti, določiti, kaj in kako meriti, kaj in kako predstaviti dobljeno ipd. Prav pri merjenju lahko razmislimo, zakaj so določene številke smiselne, druge ne. Toda kaj je sploh veljaven način merjenja? Dolžine ni težko izmeriti – z ravnilom bomo dosegli zadostno

stopnjo natančnosti za več namenov. Pri merjenju ploščine nekega območja pa že lahko nastane problem. Že pri načinu merjenja je navzoča negotovost. Ne le, da je pomemben instrument, temveč tudi zahtevana stopnja natančnosti in navzočnost raznolikosti v procesu merjenja.

K obdelavi podatkov in prikazovanju podatkov sodijo grafična predstavitev podatkov, numerični opisi, kot sta aritmetična sredina in mediana, ter *merjenje raznolikosti*. *Načrtovanje načina pridobivanja podatkov glede na njihovo raznolikost* oziroma krajše oblikovanje vzorčnih podatkov je bistvena statistična vsebina. Analiza vzorčnih podatkov omogoči sklepanje, kaj izbrani podatki povedo o širši populaciji, iz katere so bili izbrani. Pri obdelavi podatkov pa je bistveno, da »podatki govorijo sami zase«, torej da poiščemo vzorce in vzorčne podatke, ne da bi najprej razmišljali o tem, ali so podatki vzorčni za neko veliko večjo populacijo. Ta del že sodi k statističnemu sklepanju. Naslednji zgled prikazuje pomembnost povezanosti obdelave podatkov z verjetnostjo in statističnim sklepanjem.

Leta 1975 je Ann Landers, znana kolumnistka, vprašala svoje bralce:

»Če bi živeli še enkrat, ali bi imeli otroke?«

Odgovorilo je 10 000 ljudi in 70 odstotkov je odgovorilo NE.

Znano je, da pri prostovoljnih odgovorih dobimo več odgovorov od ljudi z močnimi (negativnimi) čustvi. Naključen vzorec na nacionalni ravni pa je pri tem problemu pokazal, da je 90 odstotkov staršev na isto vprašanje odgovorilo, da bi radi še enkrat imeli otroke.

Oblikovanje in razumevanje raziskav na podlagi vzorčnih podatkov je ključnega pomena v statistiki. Z vzorčnimi podatki, ki so nam na voljo, pri taki raziskavi izpeljemo domneve za celotno populacijo. Pojem preprostih naključnih vzorcev je nujno potreben, da bi 15-letniki razumeli probleme, povezane z negotovostjo.

Verjetnost. Različni pojavi imajo negotove individualne izide in pogosto je vzorec ponavljajočih se izidov oziroma rezultatov naključen. Naša intuicija naključja pogosto nasprotuje zakonom verjetnosti (Garfield & Ahlgren, 1988; Tversky & Kahneman, 1974). Vzrok za to lahko deloma najdemo v omejenem stiku učencev s problematiko naključja. Učenje obdelave podatkov ponuja naravno okolje za pridobivanje takih izkušenj. To je tudi razlog, zakaj je pri učenju negotovosti vsebina obdelave podatkov pred verjetnostjo in sklepanjem. Celo na višji stopnji izobraževanja veliko učencev ne razume verjetnosti in sklepanja zaradi napačnih predstav pri učenju osnovnih konceptov. Koncept verjetnosti v raziskavi PISA na splošno temelji na kontekstih, ki vključujejo predmete, kot so kovanci, igralne kocke in vrtavke, ali pa ne preveč zapletene realne situacije, ki jih je mogoče intuitivno analizirati.

Negotovost se pojavlja tudi v naravni raznolikosti v višini učencev, različnih dosežkih pri branju, v kategorijah dohodkov glede na višino itn. Zelo pomembno je za 15-letnike tudi, da vidijo analizo podatkov in naključje kot celoto. Pri celovitem statističnem razmišljanju postopoma prehajamo od preproste analize podatkov do statistične obdelave podatkov, od tod k verjetnosti in nato k sklepanju.

Sklepanje ima v raziskavi PISA manjšo vlogo, ker so specifične metode sklepanja formalno obravnavane in rezervirane za pouk v višjih razredih.

Naslednji primeri ilustrirajo vsebinski sklop *negotovost*.

12. primer matematične naloge: **POVPREČNA STAROST**

Če je 40 odstotkov populacije neke države stare najmanj 60 let, ali je potem mogoče, da je povprečna starost v tej državi 30 let?

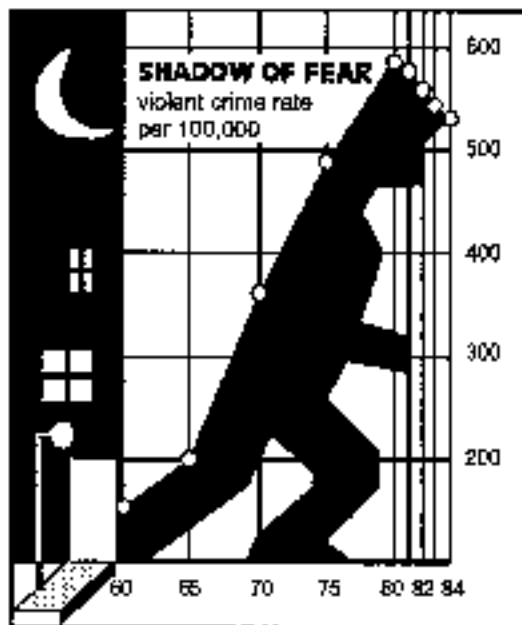
13. primer matematične naloge: **PORAST DOHODKOV?**

Ali je dohodek ljudi v Zedlandiji v preteklih desetletjih narasel ali padel? Povprečni dohodek na gospodinjstvo je namreč padel, saj je bil leta 1970 34 200 zedov, leta 1980 je bil 30 500 zedov in leta 1990 31 200 zedov. Toda dohodek na osebo je narasel: leta 1970 je bil 13 500 zedov, leta 1980 13 850 zedov in 1990 15 777 zedov.

Gospodinjstvo sestavljajo vsi ljudje, ki živijo skupaj na istem naslovu. Razloži, kako je mogoče, da se je v Zedlandiji prihodek gospodinjstva zmanjšal, hkrati pa se je zvišal dohodek na osebo.

14. primer matematične naloge: **PORAST KRIMINALA**

Spodnji graf je bil objavljen v tedenski reviji *Novice* v Zedlandiji:



Prikazuje število prijavljenih kriminalnih dejanj na 100 000 prebivalcev, in sicer na začetku v petletnih intervalih, nato pa v enoletnih intervalih.

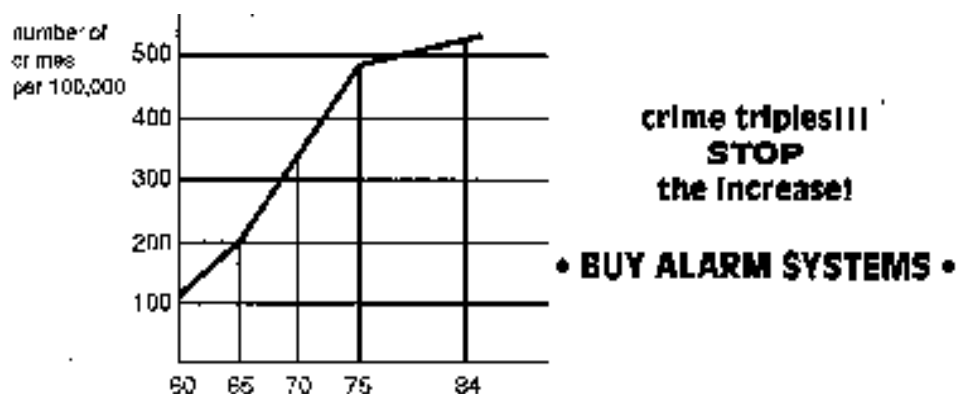
Koliko prijavljenih kriminalnih dejanj na 100 000 prebivalcev je bilo leta 1960?

Opomba: Prevod besed iz slike

shadow of fear – senca strahu, violent crime rate per 100,000 – delež nasilnih zločinov na 100 000

Primer 14.1. PORAST KRIMINALA

Izdelovalci alarmnih sistemov so enake podatke uporabili za izdelavo naslednjega grafa:



Kako so oblikovalci prišli do tega grafa in zakaj?

Policija se grafa proizvajalcev alarmnih sistemov ni razveselila, saj želi prikazati, kako uspešna je pri preprečevanju kriminala.

Nariši graf, ki bi ga policija lahko uporabila za prikaz upada kriminalnih dejanj v zadnjih letih.

Opomba: Prevod besed iz slike

Number of crimes per 100,000 – delež zločinov na 100 000, crime triples – zločini se potrojijo, stop the increase – ustavite porast, buy alarm systems – kupite alarmne naprave

MATEMATIČNI PROCESI

V tem poglavju se bomo posvetili najpomembnejši komponenti merjenja *matematične pismenosti* – kompetencam, ki jih učenci uporabljajo, ko poskušajo rešiti matematične probleme.

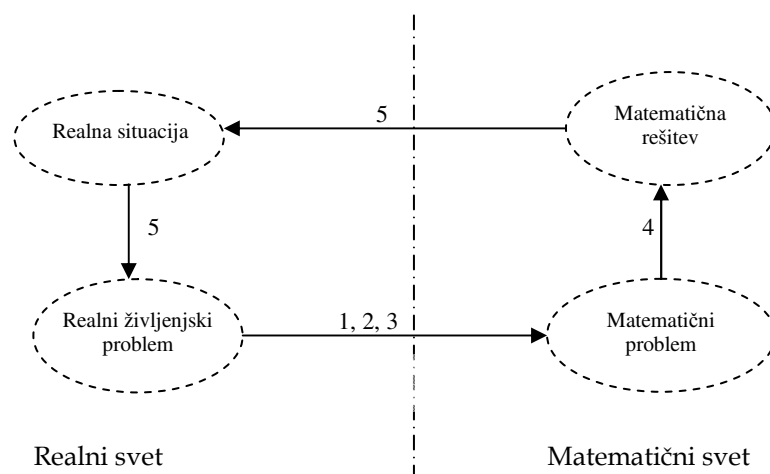
Matematizacija

Povedali smo že, da z raziskavo PISA ugotavljamo zmožnosti učencev, da učinkovito razmišljajo, analizirajo in pojasnjujejo zamisli, medtem ko postavljajo, rešujejo in interpretirajo rešitve matematičnih problemov v različnih življenjskih situacijah. Tako reševanje problemov od učencev zahteva uporabo kompetenc in spretnosti, ki so jih pridobili v letih šolanja in z življenjskimi izkušnjami. V raziskavi PISA se osnovni proces, ko učenci rešujejo probleme iz resničnega življenja, imenuje *matematizacija*.

Newton je morda opisoval matematizacijo v svojem najpomembnejšem delu Mathematical Principles of Natural Philosophy, ko je zapisal: »Ampak naš namen je samo izslediti velikost in lastnosti te sile iz pojava ter uporabiti zakonitosti, ki smo jih odkrili v nekaterih preprostih primerih, s katerimi matematično lahko ocenimo njihove učinke tudi v drugih primerih.« (Newton, 1687).

Na podlagi teoretične zasnove *matematizacije* lahko v obliki cikla prikažemo pet glavnih korakov *matematizacije*.

Prikaz 4: Cikel matematizacije



Kot smo napisali že v uvodnem poglavju, začnemo cikel *matematizacije* s seznanjanjem s problemom, postavljenim v realno okolje (1). Potem moramo prepoznati matematiko in matematične pojme v problemu (2) ter postopno odstraniti realni kontekst s pomočjo procesov, kot so postavljanje predpostavk, posploševanje in formaliziranje, ki predstavljajo osnovne matematične značilnosti dane situacije in omogočajo preoblikovanje realnega problema v matematični problem, ki verodostojno predstavlja predstavljeno situacijo (3). Sledi reševanje matematičnega problema (4) in prenos rešitve matematičnega problema v realni problem, vključno z določitvijo omejitev rešitve (5).

Pravzaprav lahko iz petih korakov *matematizacije* s pomočjo prikaza 4 spoznamo tri faze različnih aktivnosti. *Matematizacija* v začetni fazi vključuje prenos problema iz realnosti v matematični svet. Ta proces vključuje aktivnosti, kot so:

- prepoznavanje relevantne matematike v problemu iz vsakdanjega življenja,
- predstavitev problema drugače glede na prepoznane matematične pojme in procese v njem ter postavljanje ustreznih domnev,
- razumevanje povezave med običajnim jezikom, v katerem je problem postavljen, ter matematičnim jezikom, izraženim s simboli, potrebnim za matematično razumevanje problema,
- iskanje zakonitosti, povezav in vzorcev,
- prepoznavanje komponent (dejavnikov, povezav in procesov), ki so podobne (izomorfne) dobro znanim problemom,
- prenos problema v matematiko oziroma v matematični model (de Lange).

Takoj ko učenec prevede problem v matematično obliko, se celoten proces lahko nadaljuje znotraj matematike. V tej drugi fazi učenci postavljajo vprašanja in uporabljajo znane matematične veščine in koncepte. Svoj model problemske situacije poskušajo prilagoditi znanim modelom, ugotoviti zakonitosti, prepoznati vezi in narediti dobre matematične utemeljitve. Ta del procesa *matematizacije* se na splošno imenuje deduktivni proces (Blum, 1996; Schupp, 1988). Vendar pa lahko na tej stopnji nastopajo tudi procesi, ki niso strogo deduktivne narave:

- uporaba različnih prikazov in prehod iz ene predstavitve v drugo,
- uporaba simbolnega, formalnega in tehničnega jezika ter operacij,
- izpopolnjevanje in prilagajanje matematičnih modelov; kombiniranje ter povezovanje modelov,
- utemeljevanje,
- posploševanje.

Zadnja faza reševanja problema vključuje odzivanje oziroma refleksijo na celoten proces *matematizacije* in rezultate. Tukaj morajo učenci kritično predstaviti in prikazati rezultate ter ovrednotiti celoten proces. Pravzaprav je tako odzivanje s kritiko in ovrednotenjem dela potrebno v vseh fazah reševanja problema, vendar je na končni stopnji najpomembnejše. Dejavniki kritičnega pogleda na proces in vrednotenja so:

- razumevanje obsega in omejitev matematičnih procesov, postopkov in rezultatov,
- kritičen odziv na matematične utemeljitve in razlaga ter opravičevanje rezultatov,
- predstavitev in poročanje o procesu in rešitvah,
- kritika modela in njegovih omejitev.

Ta stopnja je v prikazu 4 označena na dveh mestih s številko 5, kjer v procesu *matematizacije* prehajamo iz matematične rešitve v realno rešitev in kjer iz realne rešitve prehajamo v realni problem.

Kompetence

Posameznik, ki želi izvesti model *matematizacije* znotraj problemov, postavljenih v različne situacije, znotraj *oblikovno nematematičnih* kot tudi *popolnoma matematičnih* kontekstov, ki zahtevajo poznavanje različnih matematičnih vsebin, mora imeti številne matematične kompetence, ki skupno predstavljajo vsestransko zmožnost oziroma sposobnost za matematiko. Te kompetence omogočajo posamezniku, da pridobi čim kakovostnejše matematično znanje in veščine ter jih zna tudi predstaviti

in uporabiti v problemih. Vsako kompetenco imamo razvito do določene ravni. Za različne korake *matematizacije* potrebujemo različne kompetence oziroma določeno stopnjo razvoja posameznih kompetenc. Za njihovo prepoznavanje, proučevanje in ocenjevanje so se snovalci raziskave PISA odločili, da uporabijo osem značilnih matematičnih kompetenc, katerih opis v nadaljevanju temelji na delu Nissa (1999) in njegovih danskih kolegov. Podobne formulacije lahko najdemo v delih številnih drugih avtorjev. Vendar pa imajo nekateri pojmi, ki so razloženi, pri različnih avtorjih različen pomen.

1. *Razmišljanje in razumevanje*. Ta kompetenca vključuje postavljanje vprašanj, ki so značilna za matematiko (Če je, koliko?, Kako najdemo ...?). Razmišljanje in razumevanje vključujeta poznavanje oblike odgovorov na take vrste vprašanj; ločevanje med različnimi vrstami trditev (definicije, teoremi, postavke, domneve, hipoteze, primeri); in razumevanje ter njihova uporaba z vsemi omejitvami.
2. *Utemeljevanje*. Ta kompetenca vključuje poznavanje matematičnih dokazov in razlikovanje med njimi ter drugimi oblikami matematičnega utemeljevanja (argumentiranja); vključuje poznavanje in ocenjevanje posameznih korakov matematičnega dokazovanja različnih tipov; občutek za metode dokazovanja (Kaj se lahko izvede, česa ne in zakaj?) ter nazadnje oblikovanje in izvedbo dokaza ter izražanje matematičnih utemeljitev.
3. *Komunikacija*. Ta kompetenca vključuje različne načine izražanja posameznika o matematičnih problemih z matematično vsebino, tako v ustni kot tudi v pisni obliki, ter razumevanje ustnih in pisnih izjav drugih.
4. *Modeliranje*. Ta kompetenca vključuje oblikovanje področja ali situacije, ki jo obravnavamo (modeliramo), prenos realnosti v matematični svet, interpretacijo matematičnih modelov v smislu skladnosti z realnostjo, delo z matematičnim modelom, vrednotenje, analiziranje in kritiko modela ter njegovih rezultatov, posredovanje podatkov o modelu in rezultatih (vključno z omejitvami takih rezultatov) ter spremljanje in nadzorovanje procesov modeliranja.
5. *Postavljanje in reševanje problemov*. Ta kompetenca vključuje postavljanje, oblikovanje in klasifikacijo različnih vrst matematičnih problemov (od zaprtih do odprtih problemov, od čisto matematičnih do uporabnih problemov) ter reševanje različnih vrst matematičnih problemov na različne načine.
6. *Prikazovanje (predstavitev)*. Prikazovanje vključuje kodiranje in dekodiranje, prehajanje iz ene oblike prikaza v drugo, utemeljevanje in ločevanje med različnimi oblikami prikazov (reprezentacij, predstavitev) matematičnih situacij, povezovanje in odnos med različnimi predstavitvami; izbiranje različnih oblik predstavitev glede na kontekst in namen.
7. *Uporaba simbolnega, formalnega in tehničnega jezika ter operacij*. Ta zmožnost vključuje dekodiranje in interpretiranje simbolnega in formalnega matematičnega jezika ter razumevanje njegovega odnosa z naravnim

jezikom; prevod iz naravnega jezika v simbolnega oziroma formalnega; postavitev in oblikovanje trditev, ki vključujejo izjave in izraze ter ne nazadnje uporabo spremenljivk, reševanje enačb in računanje s simboli.

8. *Uporaba orodij in pripomočkov.* Ta kompetenca vključuje poznavanje in sposobnost uporabe različnih pripomočkov in orodij (vključno z informacijsko tehnologijo), ki lahko pripomorejo k matematični aktivnosti, ter poznavanje omejitev teh pripomočkov in orodij.

Namen raziskave PISA ni individualno vrednotenje zgoraj opisanih kompetenc. V matematiki je po navadi treba hkrati uporabljati številne kompetence, saj se prekrivajo. Če bi jih torej želeli vrednotiti individualno, bi potrebovali »umetne« naloge, kar pa vodi v nepotrebno predalčkanje področja *matematične pismenosti*. Zmožnosti in sposobnosti, ki jih učenci lahko prikažejo, se med posamezniki zelo razlikujejo. Delno tudi zato, ker učenje poteka tudi na podlagi posameznikovih izkušenj, »posameznikova izgradnja znanja poteka skozi proces interakcije, pogajanja in sodelovanja« (de Corte, Greer, & Verschaffel, 1996). Snovalci raziskave OECD/PISA predvidevajo, da učenci večino matematičnega znanja pridobijo v šoli. Znanje *matematične pismenosti* se pridobiva postopoma. Bolj formalni in abstraktni načini predstavljanja in utemeljevanja se pojavijo sčasoma, kot posledica sodelovanja v aktivnostih, oblikovanih za pomoč pri razvoju neformalnih zamisli. *Matematična pismenost* se pridobiva tudi z izkušnjami, ki vključujejo interakcije v različnih družbenih situacijah ali kontekstih.

Da bi lahko iz mednarodne perspektive produktivno opisali in poročali o sposobnostih učencev, pa tudi o njihovih močnih in šibkih točkah, je potrebna določena struktura. En način njenega pridobivanja je razumljiv način opisovanja razredov kompetenc, ki temeljijo na miselni težavnostni stopnji, ki je potrebna za reševanje različnih matematičnih problemov.

V raziskavi PISA so miselne (kognitivne) aktivnosti, ki obsegajo različne vrste zmožnosti in sposobnosti, razdeljene v tri večje kompetenčne razrede: razred *reproduciranja*, razred *povezovanja* in razred *reflektiranja*. V nadaljevanju so opisani vsi trije razredi in lastnosti posameznih kompetenc v vsakem izmed teh razredov.

Razred reproduciranja

Kompetence v razredu *reproduciranja* vključujejo ponoven prikaz ali priklic matematičnega znanja, ki se največ uporablja. Vključujejo zmožnosti in sposobnosti, ki se najpogosteje uporabljajo v standardiziranih preizkusih znanja in šolskih testih. Te kompetence so poznavanje dejstev in značilnih problemskih nalog, prepoznavanje ekvivalenc, prepoznavanje znanih matematičnih lastnosti, izvajanje rutinskih postopkov, uporaba standardnih algoritmov in tehničnih spretnosti, delo z izrazi, ki vsebujejo le standardne (značilne) simbole in formule ter računanje z njimi.

1. *Razmišljanje in razumevanje.* Kompetenca v tem najnižjem kompetenčnem razredu vključuje postavljanje najbolj osnovnih oblik vprašanj (Koliko dobimo, če ...?, Koliko je ...?) in razumevanje pripadajočih oblik odgovorov

na taka vprašanja (Toliko dobimo ..., Toliko je ...). Vključuje razlikovanje med definicijami in trditvami ter razumevanje in uporabo matematičnih pojmov v kontekstih, ki so učencem blizu, torej takih, v katerih so bili najprej predstavljeni ali v katerih so bili že prej velikokrat uporabljeni.

2. *Utemeljevanje*. Utemeljevanje oziroma argumentiranje v razredu reproduciranja vključuje izvajanje in utemeljevanje standardnih količinskih procesov, vključno s preprostim izračunavanjem, podajanjem izjav in rezultatov.
3. *Komunikacija*. Kompetenca v tem razredu vključuje posameznikovo ustno in pisno razumevanje ter izražanje preprostih matematičnih trditev, vprašanj, izjav, kot je reproduciranje ali poznavanje imen in osnovnih lastnosti predmetov, navajanje računskih postopkov in njihovih rezultatov, po navadi na en sam način.
4. *Modeliranje*. Vključuje prepoznavanje, navajanje in uporabljanje dobro strukturiranih znanih modelov; vključuje prehode med modeli (in njihovimi rezultati) ter realnostjo in osnovno komunikacijo o dobljenih rezultatih.
5. *Postavljanje in reševanje problemov*. Kompetenca vključuje postavljanje in oblikovanje problemov, tako da učenci v dani situaciji le prepoznajo in obnovijo jasen in znan (matematičen ali uporaben) problem v zaprti obliki. Vključuje reševanje takih problemov z uporabo standardnih pristopov in postopkov, po navadi na en sam način.
6. *Prikazovanje (predstavitev)*. Kompetenca vključuje prepoznavanje in opis dobro znanih ter večkrat uporabljenih prikazov znanih matematičnih objektov. Prehod med različnimi prikazi in predstavitvami se zahteva le, če je ta prehod že vsebovan v prikazu oziroma kontekstu.
7. *Uporaba simbolnega, formalnega in tehničnega jezika ter operacij*. Kompetenca v razredu reproduciranja vključuje prepoznavanje in razlago rutinskega simbolnega ter formalnega jezika, ki se uporablja v dobro znanih kontekstih in situacijah. Vključuje delo s preprostimi izjavami in izrazi, ki vsebujejo simbole in formule, vključno z uporabo spremenljivk, reševanjem enačb in rutinskih postopkov.
8. *Uporaba orodij in pripomočkov*. Vključuje znanje in zmožnost uporabe znanih orodij v kontekstih ter situacijah, ki so blizu tistim, v katerih so bili predstavljeni in v katerih so jih učenci pogosto vadili.

Naloge, ki vrednotijo kompetece razreda *reproduciranja*, lahko opišemo z naslednjima ključnima lastnostima: prepoznavanje in navajanje znanega ter vadenega in izvajanje rutinskih operacij.

V nadaljevanju so navedeni primeri, ki nam pomagajo predstaviti razred *reproduciranja*.

15. primer matematičnih nalog

Primer 15.1

Reši enačbo $7x - 3 = 13x + 15$

Primer 15.2

Kolikšno je povprečje števil 7, 12, 8, 14, 15, 9?

Primer 15.3

Vrednost 1000 zedov položimo na varčevalni račun v banki, z obrestno mero 4 odstotke. Koliko zedov bo na varčevalnem računu čez eno leto?

Primer 15.4

Na tekaškem tekmovanju je odzivni čas časovni interval med pokom startne pištole in trenutkom, ko atlet zapusti startni blok. Končni čas vključuje tako odzivni čas kot tudi čas teka.

Tabela prikazuje odzivni čas in končni čas osmih tekačev sprinta na 100 metrov.

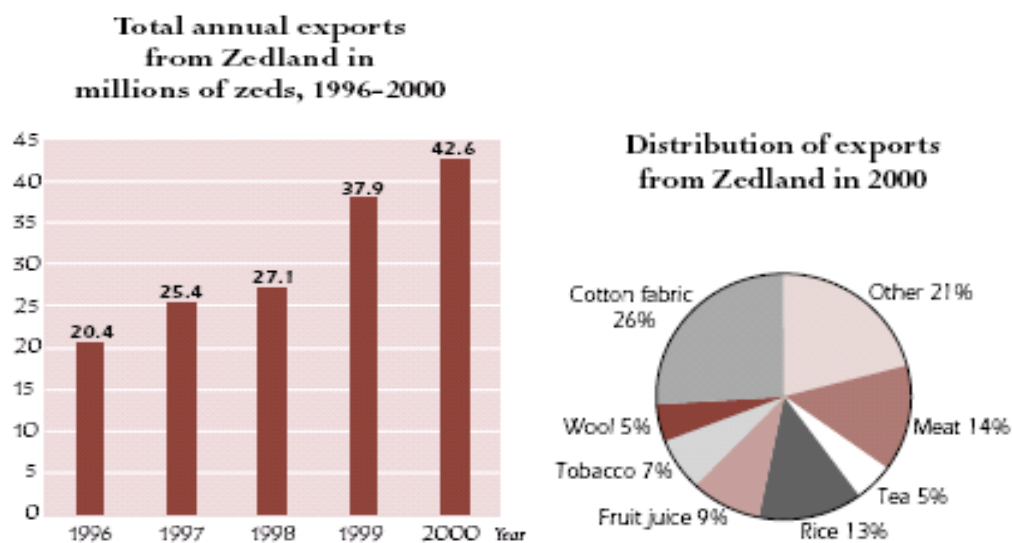
Proga	Odzivni čas (sek)	Končni čas (sek)
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	Ni končal sprinta.
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

Poišči dobitnika zlate, srebrne in bronaste medalje tega teka. V spodnjo tabelo vpiši številko proge posameznega dobitnika medalje, njegov odzivni čas in njegov končni čas.

Medalja	Proga	Odzivni čas (sek)	Končni čas (sek)
ZLATO			
SREBRO			
BRON			

Primer 15.5

V diagramih so prikazane informacije o izvozu iz Zedlandije, države, kjer so zedi uradna denarna enota.



Koliko je stal sadni sok, ki ga je Zedlandija izvažala leta 2000?

- A. 1,8 milijona zedov.
- B. 2,3 milijona zedov.
- C. 2,4 milijona zedov.
- D. 3,4 milijona zedov.
- E. 3,8 milijona zedov.

Opomba: Prevod besed iz slike

Nad stolpičnim diagramom: total annual exports from Zedland in millions of zeds, 1996–2000 – skupni letni izvoz iz Zedlandije v milijonih zedov, 1996–2000

Nad tortnim diagramom: distribution of exports from Zedland in 2000 – porazdelitev izvoza iz Zedlandije v letu 2000

Poimenovanja v tortnem diagramu: other – drugo, meat – meso, tea- čaj, rice – riž, fruit juice – sadni sok, tobacco – tobak, wool – volna, cotton fabric – bombažno blago

Z namenom, da bi pojasnili, do kod sega meja nalog iz prvega opisanega razreda *reproduciranja*, je dodana v primeru 15.3 naloga *Varčevalni račun*, opisana že v 3. primeru matematične naloge 1, ki NE sodi v razred *reproduciranja*. Ta naloga za veliko učencev presega uporabo rutinskih postopkov in že zahteva verižno sklepanje ter segmente računskih korakov, ki niso značilni za kompetence osnovnega razreda *reproduciranja*.

Razred povezovanja

Kompetence iz razreda *povezovanja* so nadgradnja kompetenc iz razreda *reproduciranja*. Kompetence *povezovanja* gradimo na kompetencah *reproduciranja* tako, da reševanje problemskih nalog prenesemo v situacije, ki niso več rutinske, kljub vsemu pa vključujejo učencem znane ali deloma znane situacije.

Kompetence razreda *povezovanja* vsebujejo poleg lastnosti kompetenc, opisanih v razredu *reproduciranja*, še dodatne lastnosti. Te lastnosti so po posameznih kompetencah opisane takole:

1. *Razmišljanje in sklepanje*. Sem sodi postavljanje vprašanj oblike (Kako najdem ...?, Katera matematična vsebina je vključena v tem problemu ...?) in razumevanje ustreznih oblik odgovorov (ki so predstavljeni v obliki tabel, grafov, algebre, slik idr.). Vključuje razlikovanje med definicijami in trditvami ter med različnimi vrstami trditev. Kompetenca v tem razredu *povezovanja* zahteva razumevanje in uporabo matematičnih konceptov v kontekstih, ki se že nekoliko razlikujejo od tistih, v katerih so bili prvotno predstavljeni oziroma v katerih so jih učenci vadili.
2. *Utemeljevanje*. Utemeljevanje oziroma argumentiranje v razredu *povezovanja* vključuje preprosto matematično sklepanje brez razlikovanja med dokazi in širšimi oblikami argumentov in utemeljevanj. Vključuje tudi razumevanje in ocenjevanje korakov različnih matematičnih sklepanj in posedovanje občutka za hevrističnost oziroma različne metode sklepanj (na primer Kaj se lahko zgodi in kaj ne?, Kaj je lahko vzrok in zakaj?, Kaj vem in kaj želim doseči?).
3. *Komunikacija*. Komunikacija v razredu *povezovanja* vključuje posameznikovo ustno in pisno razumevanje ter izražanje na področju matematike. Vključuje prepoznavanje imen osnovnih lastnosti znanih predmetov, razlage izračunov in njihovih rezultatov (po navadi na več kot en način) ter razlage odnosov. Vključuje tudi posameznikovo razumevanje pisnih in ustnih izjav drugih o vsem tem.
4. *Modeliranje*. Vključuje strukturiranje področja, ki je modelirano. Vključuje prehod iz realnosti v matematične strukture v kontekstih, ki niso preveč večplastni, kljub vsemu pa se razlikujejo od tistih, ki jih učenci dobro poznajo. Vključuje tudi interpretacijo prehodov med

modeli (in rezultati) ter realnostjo in obratno, ter različne vidike pripovedi o dobljenih rezultatih.

5. *Postavljanje in reševanje problemov.* Ta kompetenca v razredu *povezovanja* vključuje postavljanje in oblikovanje problemov na ravni, ki presega reproduciranje problemov v zaprti obliki. Vključuje reševanje problemov z uporabo standardnih pristopov in postopkov ter tudi bolj neodvisno reševanje problemskih nalog, pri katerem so vzpostavljene povezave med različnimi matematičnimi področji in različnimi načini prikazovanja ter predstavitve (tabele, grafi, sheme, besede, slike).
6. *Prikazovanje (predstavitev).* Kompetenca v tem razredu vključuje prepoznavanje in opis dobro znanih ter manj znanih prikazov matematičnih objektov. Učenci morajo znati izbrati najbolj primeren prikaz in poznati prehod med različnimi oblikami prikazov. O prikazih in prehodih med prikazi morajo znati tudi pripovedovati ter se pravilno izražati.
7. *Uporaba simboličnega, formalnega in tehničnega jezika ter operacij.* Kompetenca v razredu *povezovanja* vključuje prepoznavanje in razlago simbolnega ter formalnega jezika, tudi v manj znanih kontekstih in situacijah. Vključuje delo z izjavami in izrazi, ki vsebujejo simbole ter formule, vključno z uporabo spremenljivk, reševanjem enačb in izvajanjem izračunov z uporabo znanih postopkov.
8. *Uporaba orodij in pripomočkov.* Vključuje znanje in uporabo pripomočkov ter orodij v kontekstih in situacijah, ki so različne od tistih, v katerih je bila njihova uporaba predstavljena in vadena.

Da bi kar se da dobro prikazali kompetence razreda *povezovanja*, bomo predstavili značilne naloge. Te navadno povezujejo različne vsebinske sklope raziskave PISA oziroma vsebine različnih matematičnih kurikularnih standardov ali pa vsebujejo povezavo različnih prikazov problema.

Naloge, ki merijo kompetence iz razreda *povezovanja*, so lahko opisane z naslednjimi ključnimi besedami: sinteza, povezovanje in razširjanje znanega ter vadenega.

Prvi primer naloge iz razreda *povezovanja* je naloga *Varčevalni račun*, ki je navedena že pri razredu *reproduciranja*. Navedimo še nekaj primerov.

16. primer matematične naloge: RAZDALJA

Marija živi dva kilometra od šole, Martin pa pet.

Kako daleč drug od drugega živita Marija in Martin?

Ko je bil ta problem prvič predstavljen učiteljem, so ga mnogi zavrnil, češ da je problem prelahak – takoj je razvidno, da je odgovor 3 km. Druga skupina učiteljev pa je trdila, da ta naloga ni dobra, ker nima odgovora – ni enega samega numeričnega odgovora. Tretji odziv je bil, da naloga ni dobra, ker na vprašanje lahko odgovorimo z različnimi odgovori, ker lahko brez dodatnih informacij sklepamo le, da učenca

živita od 3 do 7 kilometrov narazen, tako vprašanje pa ni zaželeno. Majhna skupina učiteljev pa je menila, da je naloga odlična, ker mora učenec razumeti vprašanje, in da gre za resno problemsko nalogo, pri kateri strategija reševanja učencem ni znana. Ti učitelji so bili mnenja, da je to imenitna matematična naloga, čeprav vnaprej ni mogoče vedeti, kako bodo učenci nalogo rešili. Ta zadnja interpretacija povezuje problem z razredom kompetenc *povezovanja*.

17. primer matematične naloge: PICA

Picerija streže dve različno veliki okrogli pici enake debeline. Manjša ima premer 30 cm in stane 30 zedov. Večja ima premer 40 cm in stane 40 zedov. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

Katero pico se bolj splača naročiti? Prikaži svoje sklepanje.

18. primer matematične naloge: NAJEM PISARNE

Spodnja oglasa sta bila objavljena v dnevnem časopisu države, kjer je denarna enota zed.

STAVBA A	STAVBA B
Oddamo pisarniški prostor	Oddamo pisarniški prostor
58–95 kvadratnih metrov	35–260 kvadratnih metrov
475 zedov na mesec	90 zedov na kvadratni meter na
100–120 kvadratnih metrov	leto
800 zedov na mesec	

Če podjetje v tej državi namerava za eno leto najeti pisarno v velikosti 110 kvadratnih metrov, v kateri stavbi, A ali B, naj podjetje najame pisarno, da bo plačalo nižjo ceno? Prikaži svoj postopek reševanja. [© IEA/TIMSS]

Pri obeh problemih se od učencev zahteva, da prevedejo situacijo iz resničnega sveta v matematični jezik, da razvijejo matematični model, ki jim omogoča izdelavo primernih primerjav, da preverijo, ali rešitev ustreza kontekstu prvotnega vprašanja, in da posredujejo rezultate. Vse to so aktivnosti, ki so povezane z razredom *povezovanja*.

Razred reflektiranja

Kompetence v razredu *reflektiranja* so učenčeve sposobnosti oziroma zmožnosti samostojnega delovanja in razmišljanja o procesih, ki so potrebni za reševanje problemov. Povezujejo se z učenčevimi sposobnostmi načrtovanja strategij reševanja problema in uresničevanja teh načrtov v problemskih kontekstih, ki vsebujejo več elementov in so morda bolj »originalni« oziroma nepoznani kot tisti v razredu *povezovanja*. Poleg kompetenc, opisanih v razredu *povezovanja*, razred *reflektiranja* vsebuje še dodatne lastnosti.

1. *Razmišljanje in sklepanje.* V to kompetenco razreda *reflektiranja* sodi postavljanje vprašanj (Kako najdem ...?, Katera matematična vsebina je vključena v tem problemu ...?, Kakšno je osnovno stališče danega problema ali situacije?) in razumevanje pripadajočih oblik ustreznih odgovorov (ki so predstavljeni v obliki tabel, grafov, algebre, slik, ali ključnih točk itn.). Vključuje ločevanje med definicijami, teoremi, domnevami, hipotezami in trditvami ter odzivanje in jasno razpravljanje o teh matematičnih objektih. Razmišljanje in sklepanje v tem razredu vključuje tudi razumevanje ter delo z matematičnimi koncepti v kontekstih, ki so novi ali večplastni, ter njihov domet in omejitve, kot tudi posploševanje rezultatov.
2. *Utemeljevanje.* Utemeljevanje v razredu *reflektiranja* vključuje najprej preprosto matematično sklepanje, pri katerem mora učenec ločiti med dokazovanjem in širšimi oblikami utemeljevanja; nato vključuje razumevanje in ocenjevanje korakov različnih matematičnih sklepanj ter uporabo različnih metod sklepanja s postavljanjem in odgovori na vprašanja, značilna za ta najvišji kompetenčni razred (Kaj se lahko zgodi in kaj ne?, Kaj je lahko vzrok in zakaj?, Kaj vem in kaj želim doseči?, Katere lastnosti so nujno potrebne?, Kako so predmeti povezani?).
3. *Komunikacija.* Komunikacija v razredu *povezovanja* vključuje posameznikovo ustno in pisno razumevanje ter izražanje v matematiki. Vključuje tako prepoznavanje imen osnovnih lastnosti znanih predmetov in razlage izračunov ter njihovih rezultatov (po navadi na več kot en način) kot razlage večplastnih povezav, vključno z logičnimi povezavami in odnosi. Vključuje tudi posameznikovo razumevanje pisnih in ustnih izjav drugih o takih stvareh.
4. *Modeliranje.* Vključuje strukturiranje področja, ki je ali mora biti modelirano. Obsega prehod realnosti v matematične strukture v kontekstih, ki so lahko večplastni ali se zelo razlikujejo od tistih, ki jih učenci poznajo. Vključuje tudi interpretacijo prehodov med modeli (in rezultati) ter realnostjo v obe smeri, vključno z različnimi vidiki posredovanja rezultatov modeliranja. Modeliranje v najvišjem razredu *reflektiranja* vključuje tudi zbiranje informacij in podatkov, spremljanje procesa modeliranja ter evalvacijo končnega modela. Vključuje tudi analiziranje, kritično ocenjevanje in sodelovanje v bolj večplastni razpravi o modelih in modeliranju.
5. *Postavljanje in reševanje problemov.* Ta kompetenca v razredu *reflektiranja* vključuje postavljanje in oblikovanje problemov na ravni, ki močno presega reprodukcijo problemov (od čisto matematičnih do uporabnih) v zaprti obliki. Vključuje reševanje takih problemov z uporabo standardnih pristopov in postopkov, hkrati pa vključuje tudi originalne procese reševanja problemov, pri katerih so vzpostavljene povezave med različnimi matematičnimi področji in med različnimi načini prikazovanja in predstavitev (sheme, tabele, grafi, besede, slike). Vključuje tudi premišljevanje (reflektiranje) o strategijah in rešitvah.

6. *Prikazovanje (predstavitev).* Kompetenca v tem razredu vključuje prepoznavanje in opis dobro znanih ter manj znanih prikazov matematičnih objektov kot v prejšnjem razredu. Učenci morajo znati izbrati najbolj primeren prikaz in poznati prehod med različnimi oblikami prikazov. Hkrati pa se od učenca pričakujeta ustvarjalna kombinacija prikazov in ustvarjanje nestandardnih predstavitev.
7. *Uporaba simboličnega, formalnega in tehničnega jezika ter operacij.* Kompetenca v razredu *reflektiranja* vključuje prepoznavanje in razlago simbolnega ter formalnega jezika v nepoznanih kontekstih in situacijah. Vključuje delo z izjavami in izrazi, ki vsebujejo simbole in formule, vključno z uporabo spremenljivk, reševanjem enačb in izvajanjem izračunov. Vključuje pa tudi sposobnost soočanja z večplastnimi izjavami in izrazi ter nepoznanim simbolnim in formalnim jezikom ter sposobnost razumevanje tega jezika in prevod takega jezika v naravni jezik.
8. *Uporaba pripomočkov in orodij.* Ta kompetenca vključuje znanje in uporabo znanih ter neznanih pripomočkov in orodij v kontekstih in situacijah, ki se precej razlikujejo od tistih, v katerih so bili predstavljeni in uporabljeni. Vključuje tudi znanje o omejitvah pripomočkov in orodij.

Naloge, ki ocenjujejo razred kompetenc *reflektiranja*, lahko opišemo z naslednjimi ključnimi besedami: zahtevnejše sklepanje, utemeljevanje, izločanje manj pomembnega (abstrakcija), posploševanje in modeliranje v novih kontekstih.

Dodajmo nekaj primerov iz zadnjega kompetenčnega razreda *reflektiranja*.

19. primer matematične naloge: VIŠINA UČENCEV

Nekega dne so pri pouku matematike izmerili višino vseh učencev. Povprečna višina dečkov je bila 160 cm, povprečna višina deklic pa 150 cm. Alenka je bila najvišja – njena višina je bila 180 cm. Zdenko je bil najmanjši – njegova višina je bila 130 cm.

Dva učenca sta tisti dan manjkala, pri pouku pa sta bila spet naslednji dan. Njuni višini sta bili izmerjeni in povprečje na novo izračunano. Presenetljivo se povprečna višina deklic in povprečna višina dečkov ni spremenila.

Ali lahko iz teh informacij sklepaš naslednje? Pri vsakem sklepu obkroži da ali ne.

Sklep	Da ali ne?
Oba učenca sta deklici.	da / ne
En učenec je deček, en pa deklica.	da / ne
Oba učenca sta enako velika.	da / ne
Povprečna višina vseh učencev se ni spremenila.	da / ne
Zdenko je še vedno najmanjši.	da / ne

Problem je v različnih pogledih precej zapleten. Vključuje precej zelo natančnega branja. Površno branje bo po vsej verjetnosti vodilo v napačno razumevanje. Poleg tega je zelo težko poiskati ključno matematično informacijo.

Kontekst se spreminja glede razreda in časa. Namesto razred se uporablja beseda pouk, ker s tem poudarimo, da se lastnosti razreda spreminjajo s časom. Pouk je omenjen, ko naloga govori o povprečju za dečke in deklice ločeno, dodano pa je, da je Alenka najvišja (med deklicami ali med učenci) in Zdenko najmanjši (med dečki ali med učenci). Če učenci besedila ne preberejo pozorno, bodo spregledali dejstvo, da je Alenka deklica in Zdenko deček.

Zagotovo je težava dejstvo, da morajo učenci kombinirati informacije iz prvega dela uvodnega besedila (informacija o različnih višinah) z drugim delom, v katerem je predstavljena informacija o obeh manjkajočih učencih oziroma, še bolje, ni predstavljena. Tukaj se srečamo s spremembami, ki nastanejo s časom: dva učenca nista bila navzoča v razredu pri pouku prvi dan, vendar ju je treba upoštevati naslednji dan. Tako se s časom pomen pojma razred spremeni. Ne ve pa se, ali sta manjkajoča učenca v razredu dečka, deklici ali deklica in deček. K težavam je treba dodati še dejstvo, da ne rešujemo enega samega problema, temveč pet problemov.

Da bi lahko pravilno odgovorili, morajo učenci matematično razumeti statistične koncepte, ki so vključeni. Problem vključuje sposobnost postavljanja vprašanj (Kako vem?, Kako najdem?, Kakšne so možnosti?, Kaj se zgodi, če ...?) in sposobnost razumevanja ter upravljanja pojma povprečja v besedilih, ki so večplastna, čeprav je kontekst znan.

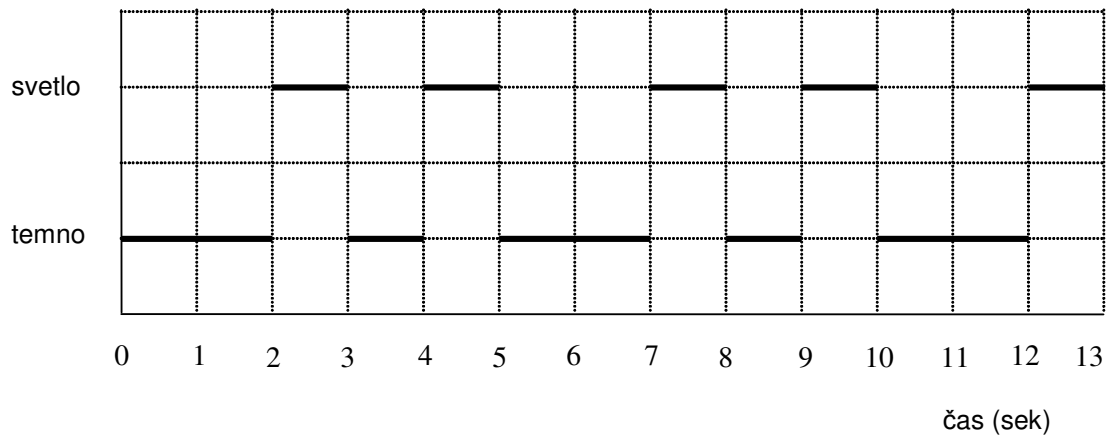
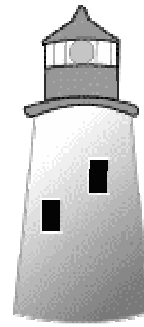
Iz opisa postane jasno, da je ta naloga za učence zelo zahtevna (kar so pokazali rezultati raziskave PISA) in da pripada razredu *reflektiranja*. Naloga je opisana tudi v dodatnih primerih, v katerih so naveden še njene druge lastnosti in klasifikacije.

20. primer matematične naloge: SVETILNIK

Svetilniki so stolpi s svetlobnim signalom na vrhu. Svetilniki pomagajo ladjam na morju, da ponoči najdejo svojo pot, kadar plujejo blizu obale.

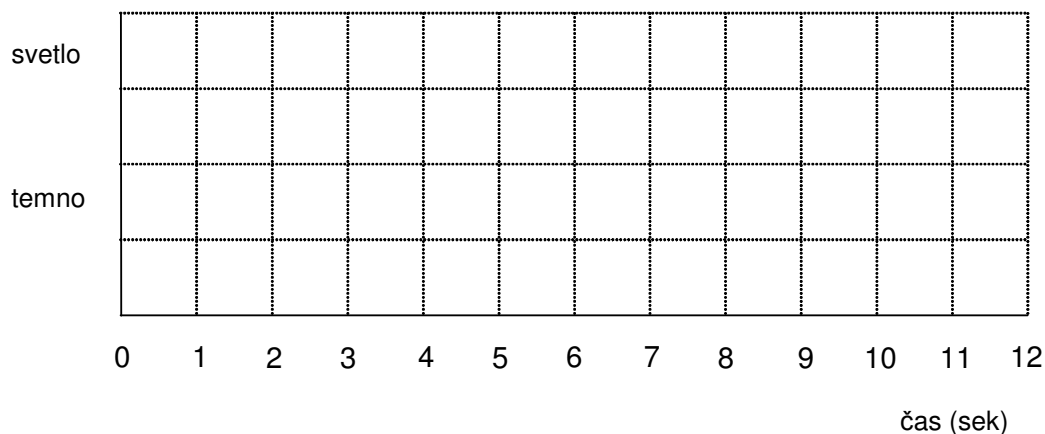
Svetlobni signal oddaja svetlobne bliske v ponavljajočem se vnaprej določenem vzorcu. Vsak svetilnik ima svoj vzorec.

V spodnjem diagramu vidiš vzorec določenega svetilnika. Svetlobni bliski se izmenjujejo s temnimi obdobji.



Vzorec je reden in se vsake toliko časa ponovi. Čas celotnega ciklusa vzorca, preden se začne ponovitev, se imenuje *perioda*. Ko prepoznaš periodo vzorca, ni težko podaljšati diagrama za naslednjih nekaj sekund, minut in celo ur.

V spodnji diagram nariši graf možnega vzorca svetlobnih bliskov svetilnika, ki oddaja svetlobne bliske 30 sekund na minuto. Perioda tega vzorca mora biti enaka 6 sekund.



Učenci morajo najprej razumeti prikaz, saj take oblike grafa najverjetneje ne poznajo.

Enako najbrž velja tudi za idejo periodičnosti.

Postavljeno vprašanje je zelo odprte narave. Učenci morajo »načrtovati« *mogoč* vzorec svetlobnih bliskov. Veliko učencev se v šoli ne sreča s »konstruktivnimi« vprašanji take vrste. Ta konstruktivni vidik je nujen sestavni del *matematične pismenosti* vsakega posameznika, namreč uporaba matematičnih kompetenc ne le pasivno, temveč kot samostojno oblikovanje odgovora.

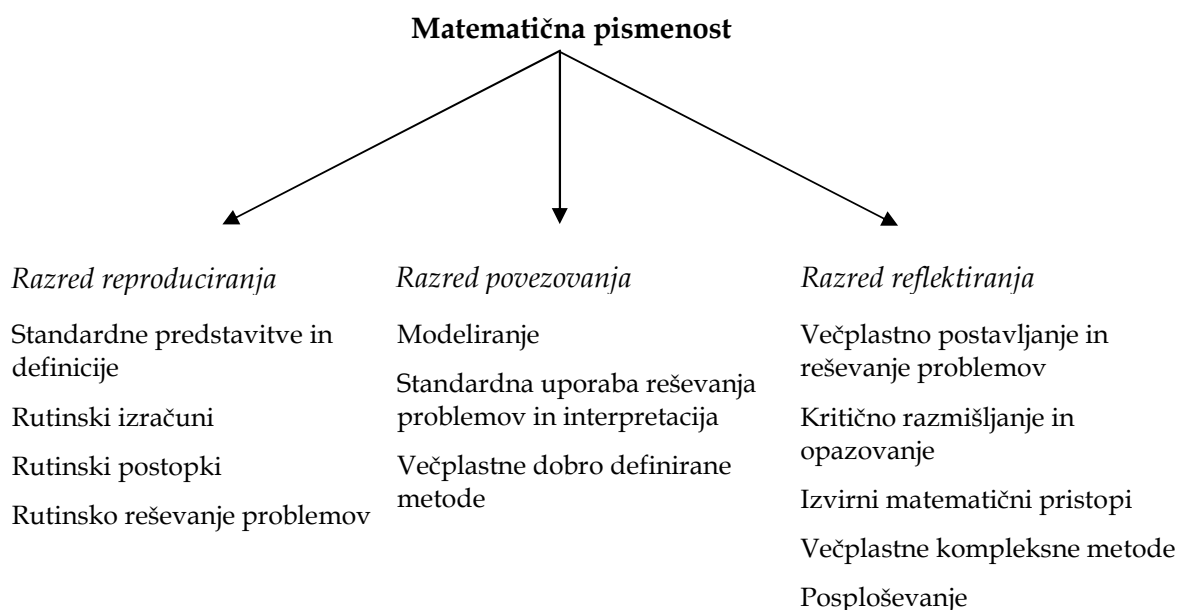
Reševanje problema ni trivialno, ker je treba izpolniti dva pogoja: enaka količina časa svetlobe in teme (30 sekund na minuto) ter perioda, dolga natančno šest sekund. Zaradi te kombinacije morajo učenci nujno dojeti in uporabiti pojem periodičnosti, kar je znak, da je to kompetenčni razred *reflektiranja*.

Za ta primer naloge bi lahko kdo trdil, da imajo prednost učenci, ki živijo blizu morja. Zato je treba poudariti, da *matematična pismenost* vključuje sposobnost uporabe matematike v kontekstih, ki se razlikujejo od lokalnih. Ta sposobnost prenosa je ključna kompetenca matematične pismenosti. To ne pomeni, da nekateri učenci nimajo prednosti v določenih kontekstih in drugi v drugih. Vendar pa analiza tega vprašanja po državah ni pokazala, da bi bila ta naloga tak primer. Učenci iz držav ob morju niso odgovarjali nič bolje od učencev iz držav, ki niso ob morju. Tudi ta naloga je v celoti predstavljena v dodatnih nalogah na koncu publikacije.

Povzetek matematičnih procesov v raziskavi PISA

Prikaz 5 opisuje razrede kompetenc in povzema razlike med njimi.

Prikaz 5: Prikaz razredov kompetenc



Za klasificiranje matematičnih nalog bi lahko uporabili dosedanje opise kompetenc in jih dodelili enemu izmed razredov na naslednji način. Ocenili bi vsako izmed osmih kompetenc v dani nalogi. Če bi ena ali več kompetenc ustrezala opisu za razred *reflektiranja*, potem bi bila naloga dodeljena razredu *reflektiranja*, sicer bi iskali ustrežni nižji kompetenčni razred. Naloga bi bila dodeljena razredu *povezovanja*, če bi vsaj ena kompetenca ustrezala opisu kompetence iz razreda *povezovanja*. Če pa tudi take kompetence ne bi našli, bi naloga sodila v razred *reproduciranja*.

OCENJEVANJE MATEMATIČNE PISMENOSTI

Definicijo matematične pismenosti, teoretično zasnovo zanjo in situacijo oziroma kontekst, vsebinsko strukturo nalog in kompetence, ki se v raziskavi PISA vrednotijo, smo že opisali. Sledi podrobnejša obravnava vrednotenja nalog in vprašanj za preverjanje matematične pismenosti.

Lastnosti vprašanj v raziskavi PISA

Na začetku opišimo obliko vprašanj in klasifikacijo vprašanj ali delov nalog, ki so uporabljene za merjenje znanja učencev.

Oblike matematičnih nalog in vprašanj v raziskavi PISA

V raziskavi PISA merimo *matematično pismenost* 15-letnikov, zato morajo biti oblike uporabljenih vprašanj prilagojene tej populaciji.

Strokovni delavci oziroma koderji, ki sodelujejo pri vrednotenju odgovorov učencev, imajo vpogled v uvodno besedilo naloge, predstavitev dejanskih vprašanj, vprašanje in zahtevano rešitev. Poleg tega je pri vprašanjih, ki zahtevajo odgovore, ki jih ni mogoče samodejno kodirati, dodana natančna kodirna shema, ki omogoča usposobljenim strokovnim delavcem, ki vrednotijo odgovore na vprašanja v vseh sodelujočih državah, da kodirajo odgovore učencev veljavno, objektivno in zanesljivo.

V raziskavi PISA 2006 je vsak del naloge, ki vsebuje vprašanje, postavljen v eno izmed štirih situacij: *osebno, izobraževalno oziroma poklicno, javno oziroma širše družbeno in znanstveno*. Naloge in vprašanja so izbrani tako, da so v matematičnem instrumentu za merjenje *matematične pismenosti* v celoti enakomerno razporejene vse štiri opisane situacije.

Snovalci raziskave PISA najbolj cenijo avtentične naloge, torej naloge, ki jih lahko uporabimo v realnih življenjskih situacijah in ki imajo avtentični kontekst, v katerem moramo uporabiti znanje matematike za reševanje problema. Problemi z oblikovno nematematičnim kontekstom, ki zahtevajo rešitev in interpretacijo v oblikovno nematematičnem kontekstu, so najbolj zaželeni in najbolj cenjeni za merjenje *matematične pismenosti*.

Naloge, ki so bile izbrane za raziskavo PISA 2003, naj bi bile vsebinsko skladne s štirimi opisanimi vsebinskimi sklopi. Izbira matematičnih vprašanj v nalogah raziskave PISA 2003 zagotavlja, da so štirje vsebinski sklopi dobro zastopani.

Vprašanja morajo biti povezana z enim izmed opisanih matematičnih procesov reševanja v poglavju o kompetencah in procesih. Vprašanju mora biti dodeljen razred kompetenc, ki je v odgovoru zahtevan.

Raven branja, ki se od učenca zahteva, da ta lahko uspešno odgovori na vprašanje, je treba skrbno določiti. Torej snovalci raziskave tudi s tega stališča tehtno premislijo, kako oblikovati vprašanja, da bodo čim bolj preprosta in neposredna. Posebna pozornost je usmerjena na kontekste vprašanj, ki bi lahko bili kulturno pristranski. Takim nalogam in vprašanjem se snovalci seveda poskušajo izogniti.

Naloge in vprašanja, ki so izbrani v merski instrument raziskave PISA, predstavljajo širok razpon po težavnosti, tako da bi ustrezale pričakovanemu širokemu razponu sposobnosti učencev, ki v raziskavi PISA sodelujejo. Poleg tega naj bi bili tudi vsebinski sklopi in kompetence kar se da dobro zastopani z vprašanji širokega razpona težavnosti. Težavnost vprašanj se ugotavlja s pomočjo predraziskave, ki poteka pred izborom vprašanj v glavno raziskavo.

Tipi vprašanj

Ko se sestavljajo instrumenti merjenja, je treba natančno upoštevati vpliv tipa vprašanja na učenčeve dosežke in s tem tudi na definicijo znanja, ki se meri. Še posebno pomembno je to v raziskavi, kot je PISA, v kateri je zaradi velikega obsega sodelujočih držav in zaradi konteksta, ki naj bo zadovoljiv in kar se da nepristranski za vse sodelujoče države, razpon mogočih oblik nalog in tipov vprašanj omejen.

V raziskavi PISA merimo *matematično pismenost* s pomočjo kombinacije vprašanj odprtega tipa, zaprtega tipa in izbirnega tipa. V merskih instrumentih raziskave PISA je zastopano enako število vprašanj vsakega tipa.

Na podlagi izkušenj razvoja in uporabe vprašanj za raziskavo PISA 2000, je tip vprašanj izbirnega tipa najbolj primeren za merjenje kompetenc iz razreda *reproduciranja* in *povezovanja*. Tako vprašanje prdstavlja naloga *Tjulenj*. Vprašanje je povezano z razredom *povezovanja* in ima končno število mogočih odgovorov. Da bi učenci lahko rešili to vprašanje, morajo problem prevesti v matematično obliko, ustvariti model, ki bo predstavljal periodično naravo situacije, ki je opisana v kontekstu, in razširiti vzorec, da bo skladen z enim izmed postavljenih odgovorov.

21. primer matematične naloge: TJULENJ

Tjulenj mora dihati, tudi ko spi. Martin je eno uro opazoval tjulnja. Na začetku opazovanja se je tjulenj potopil na dno morja in začel spati. Po osmih minutah je počasi priplaval na gladino in vdihnil.

V treh minutah je bil spet na dnu morja in celoten proces se je zelo redno ponavljal.

Po eni uri je tjulenj:

- a) na dnu.
- b) na poti gor.
- c) dihal.
- d) na poti dol.

22. primer matematične naloge: KMEČKA HIŠA

71

Ploščina tal ABCD danega podstrešja = _____ m²

Vprašanja odprtega tipa zahtevajo od učenca širši odgovor, proces oblikovanja odgovora pa pogosto vključuje zahtevnejše miselne aktivnosti. Pogosto taka vprašanja ne zahtevajo od učencev le odgovora, temveč tudi prikaz korakov, s katerimi so učenci prišli do odgovora oziroma razlago postopka, ki jih je privedel do odgovora. Glavna značilnost vprašanj odprtega tipa je, da omogočajo prikaz različnih učenčevih sposobnosti, saj podajo rešitve na različnih ravneh matematične zahtevnosti, kot je prikazano v 23. primeru matematične naloge z naslovom *Indonezija* (Vir: de Lange in Verhage, 1992).

23. primer matematične naloge: INDONESIA

Indonezija leži med Malezijo in Avstralijo. V tabeli je prikazano nekaj podatkov o indonezijski populaciji in njeni porazdelitvi po otokih.

Regija	Velikost območja (km ²)	Odstotek celotnega območja	Populacija leta 1980 (v milijonih)	Odstotek celotne populacije
Java/Madura	132 187	6,95	91 281	61,87
Sumatra	473 606	24,86	27 981	18,99
Kalimantan (Borneo)	539 460	28,32	6 721	4,56
Sulawesi (Celebes)	189 216	9,93	10 377	7,04
Bali	5 561	0,30	2 470	1,68
Irian Jaya	421 981	22,16	1 145	5,02
SKUPAJ	1 905 569	100,00	147 384	100,00

Eden izmed glavnih izzivov Indonezije je neenakomerna porazdelitev populacije po otokih. Iz tabele je razvidno, da na Javi, ki predstavlja manj kot 7 odstotkov celotnega območja, živi skoraj 62 odstotkov populacije.

Nariši graf (ali grafe), ki prikazuje neenakomerno porazdelitev indonezijske populacije.

V raziskavi PISA je približno tretjina matematičnih vprašanj odprtega tipa. Odgovore na vprašanja teh nalog morajo kodirati usposobljeni strokovni delavci, ki pri svojem delu uporabljajo kodirne priročnike in svojo strokovno presojo. Obstaja možnost neskladja v vrednotenju takih vprašanj med različnimi sodelujočimi državami, zato snovalci raziskave PISA ugotavljajo zanesljivost kodiranja, da bi omejili obseg neskladij. Izkušnje kažejo, da je mogoče razviti jasno in natančno kodirno shemo ter pridobiti zanesljive rezultate o dosežkih.

V raziskavi PISA so naloge, ki izhajajo iz enega samega uvodnega besedila, torej imajo skupno situacijo in kontekst, sledi pa jim več vprašanj. Take naloge dajo

učencem možnost, da se dobro seznani s kontekstom prek vprašanj, katerih težavnost se postopoma stopnjuje. Prvih nekaj vprašanj je po navadi izbirnega tipa ali zaprtega tipa, sledijo pa jim vprašanja odprtega tipa. Take naloge in vprašanja lahko uporabljamo za merjenje kompetenc vseh razredov.

En razlog za uporabo nalog z eno situacijo in kontekstom in več vprašanji je, da lažje opišemo kompleksni realni problem, ki se zrcali v teh nalogah. Drug razlog je povezan z učinkovito porabo časa testiranja, saj se skrajša čas, ki ga učenec potrebuje, da se seznani z vsebino opisane situacije. Pri oblikovanju nalog in kodirne sheme se upošteva, da mora biti točkovanje vsakega vprašanja neodvisno od točkovanja drugih vprašanj. Poleg tega je manjše število različnih situacij ugoden dejavnik za zvečanje objektivnosti merskega instrumenta, saj vsak kontekst lahko zaradi pristranskosti zmanjša objektivnost.

Struktura vrednotenja

V raziskavi PISA 2003, v kateri je bila matematika osrednje področje merjenja, je bilo reševanju delovnega zvezka oziroma merskega instrumenta za *matematično pismenost* namenjenih 210 minut časa. Izbrane naloge so bile razporejene v sedem sklopov nalog, za reševanje vsakega sklopa nalog pa je bilo namenjenih 30 minut. Vsak delovni zvezek je bil sestavljen iz štirih sklopov. V raziskavi PISA 2006 je bilo reševanju matematičnih nalog namenjeno manj časa, vendar pa je bila razporeditev vprašanj v klastre podobna.

Skupni čas testiranja matematike je razdeljen kar se da enakomerno med štiri vsebinske sklope (*količina, prostor in oblika, sprememba in odnosi ter negotovost*) in štiri opisane situacije (*osebna, izobraževalna oziroma poklicna, javna oziroma širše družbena in znanstvena*). Razmerje nalog (ali delov nalog), ki izražajo tri kompetenčne razrede (*razred reproduciranja, povezovanja in reflektiranja*), je približno 1 : 2 : 1. Približno tretjina nalog je izbirnega tipa, približno tretjina je nalog zaprtega tipa in tretjina nalog odprtega tipa.

Poročanje o matematičnih dosežkih

Za analizo in obdelavo podatkov ter povzetke reševanja nalog raziskave PISA so snovalci raziskave izdelali petstopenjsko lestvico dosežkov (Masters & Forster, 1996; Masters, Adams, & Wilson, 1999). Ta lestvica je oblikovana z uporabo statističnih modelov z naslovom *Item response modelling approach to scaling ordered outcome data*. Lestvica dosežkov se uporablja za opisovanje dosežkov učencev znotraj posameznih držav v smislu petih opisanih ravni dosežkov, hkrati pa je lestvica tudi merilo za mednarodno primerjavo.

Pozornost je bila namenjena tudi razvoju nekaterih drugih lestvic, s katerimi lahko poročamo o rezultatih. Te lestvice temeljijo na primer na kompetenčnih razredih ali vsebinskih sklopih ipd. Odločitve o nadaljnjem proučevanju in razvoju ločenih tako imenovanih podlestvic so se oblikovale na različnih temeljih, vključno s

psihometričnimi ocenami, ki sledijo analizam podatkov, pridobljenih z raziskavo PISA. Da bi omogočili tudi te možnosti, je treba zagotoviti, da je v raziskavo izbrano zadostno število vprašanj iz vseh opisanih kategorij. Poleg tega morajo biti vprašanja znotraj vsake posamezne kategorije na različni težavnostni stopnji.

Kompetenčni razredi opisujejo kategorije naraščajočih kognitivnih zahtev in večplastnosti vprašanj, vendar pa neposredno ne kažejo hierarhije dosežkov učencev glede na težavnost vprašanj. Miselna večplastnost je le ena komponenta težavnosti vprašanja, ki vpliva na raven dosežkov. Druge komponente so na primer seznanjenost s problemom, količina in čas prakticiranja določenega problema oziroma vprašanja itn. Zato je lahko vprašanje izbirnega tipa, ki vključuje kompetence iz razreda *reproduciranja* (kot na primer naloga z vprašanjem Kaj od narisane je pravokotni paralelepiped?, ki mu sledijo skice žoge, pločevinke, škatle in kvadrata), zelo lahka za učence, ki so se naučili, kaj pomeni ta izraz, ali pa zelo težka za učence, ki s to terminologijo niso seznanjeni. Ker si je torej mogoče zamisliti težka vprašanja iz razreda *reproduciranja* in tudi lahka vprašanja iz razreda *reflektiranja* ter tudi vprašanja različne težavnostne stopnje znotraj vsakega kompetenčnega razreda, bi lahko pričakovali močno pozitivno povezanost med kompetenčnimi razredi in težavnostjo vprašanj.

Dejavniki, na katerih temeljijo ravni težavnosti vprašanj in dosežki učencev pri ugotavljanju *matematične pismenosti*, vključujejo:

- *vrsto in stopnjo zahtevane interpretacije in refleksije*. Ta dejavnik vključuje naravo zahtev, ki izhajajo iz konteksta. Težavnost vprašanj je odvisna od obsega matematike, ki se kaže v problemu, oziroma ki jo mora učenec prikazati v problemu, in stopnje samostojnosti, kritičnega razmišljanja in posploševanja, ki je potrebna pri reševanju;
- *vrsto predstavitvenih spretnosti*. Ta dejavnik loči vprašanja, v katerih je uporabljena le ena vrsta prikaza, od problemov in vprašanj, v katerih so uporabljene različne oblike prikazov in pri katerih morajo učenci prehajati med različnimi oblikami prikazov ali sami najti primerno obliko predstavitve;
- *vrsto in raven potrebnih matematičnih spretnosti*. Ta dejavnik loči enostopenjske probleme, ki zahtevajo en sam korak za rešitev problema in od učencev zahtevajo reprodukcijo osnovnih matematičnih dejstev ter izvajanje preprostih računskih operacij, od večstopenjskih problemov, ki zahtevajo reševanje v več korakih, zahtevnejše matematično znanje, večplastno odločanje, samostojno pridobivanje informacij, kakovostne veščine za reševanje problemov in modeliranje;
- *vrsto in stopnjo matematičnega utemeljevanja*. Ta dejavnik loči na eni strani vprašanja, v katerih utemeljevanje sploh ni potrebno, vprašanja, v katerih učenci posredujejo utemeljitve, ki so dobro znane in ki so jih že pred tem pogosto posredovali, in v skrajnem primeru vprašanja, kjer morajo učenci samostojno oblikovati matematične utemeljitve, razumeti utemeljitve drugih ali soditi o pravilnosti danih utemeljitev oziroma dokazov.

Na najnižji ravni dosežkov učenci po navadi uspešno odgovarjajo na vprašanja, ki vključujejo znane situacije in kontekste, ki so jim blizu. Uspešno rešujejo naloge, ki so preprosto oblikovane in je ustrezna informacija jasno predstavljena. Učenci po navadi uspešno izvajajo procese z enim samim korakom, potrebnim za rešitev. Na tej najnižji ravni se zahteva reproduciranje dobro znanih matematičnih dejstev ali procesov in uporabljanje preprostih spretnosti računanja.

Na višji ravni dosežkov učenci po navadi rešujejo bolj večplastna vprašanja, združujejo in primerjajo različne informacije ali interpretirajo različne prikaze matematičnih konceptov ali informacij. Učenci naj bi bili sposobni prepoznati, kateri elementi so pomembni in kako so med seboj povezani. Rešujejo večstopenjska problemska vprašanja, ki zahtevajo več kot en sam korak v procesu reševanja. Vprašanja zahtevajo delo z danimi matematičnimi modeli ali formulacijami, ki so že dane v algebrski obliki, v tej obliki pa morajo nato učenci poiskati rešitev ali izvesti nekaj korakov, da rešitev izračunajo.

Na najvišji ravni dosežkov učenci prevzemajo bolj ustvarjalno in aktivno vlogo. Učenci na tej ravni po navadi rešujejo probleme, postavljene v njim neznan kontekst. Učenci interpretirajo bolj zapletene informacije in usklajujejo številne korake procesa reševanja, v katerem uporabijo ustrezna orodja in matematično znanje. Samostojno oblikujejo problem in razvijejo primeren model, ki ustreza opisani problemski situaciji in omogoča rešitev. Poleg tega učenci na tej najvišji ravni dosežkov prepoznajo in uporabljajo ustrezne pripomočke ter znanje v neznanem kontekstu, zmorejo ustvariti lastno pot do rešitve problema in prikažejo zahtevnejše miselne procese, kot so posploševanje, sklepanje ter utemeljevanje pri reševanju in interpretaciji problema.

Pripomočki in orodja

Načelo raziskave PISA glede uporabe kalkulatorjev in drugih pripomočkov je, da naj jih učenci svobodno uporabljajo tako, kot bi jih uporabljali pri pouku v šoli.

To pomeni najbolj avtentično merjenje učenčevih dosežkov in omogoča kar se da kakovostno primerjavo dosežkov izobraževalnega sistema, saj je sestavni del *matematične pismenosti* vključen tudi v zmožnosti uporabe orodij in pripomočkov, ki jih imajo učenci tudi zunaj pouka za reševanje vsakdanjih problemov. Možnost uporabe kalkulatorjev torej ni v nasprotju z zahtevami in splošnimi načeli raziskave PISA.

Učenci, ki so navajeni, da si pri odgovarjanju na vprašanja pomagajo s kalkulatorjem, bi bili prikrajšani, če jim uporaba tega pripomočka ne bi bila dovoljena.

Povzetek

Cilj raziskave PISA na področju matematike je razviti kazalnike, ki kažejo, kako dobro so države pripravile svoje 15-letnike, da bodo postali aktivni, informirani,

razmišljujoči in inteligentni državljani s stališča uporabe matematičnega znanja. V ta namen so snovalci raziskave razvili vrednotenje, ki se osredotoča na uporabo matematičnega znanja, ki so ga učenci pridobili. V raziskavi je poudarek na uporabnem matematičnem znanju, ki omogoča reševanje vsakdanjih problemov. Moč raziskave in izsledkov je v številnih problemih, ki so različne zahtevnostne stopnje, različni glede vsebine, zahtevanih kompetenc in različni glede strukture in navodil glede načina reševanja; v ospredje pa so postavljeni avtentični problemi, ki zahtevajo samostojno razmišljanje.

Če povzamemo, to delo prikazuje definicijo *matematične pismenosti* v raziskavi PISA in značilnosti nalog, ki v njej nastopajo. Osnovne komponente merjenja *matematične pismenosti* so skladne s komponentami bralne in naravoslovne pismenosti, vključujejo opis situacije in konteksta, ki zahteva znanje *matematične pismenosti*, opis matematične vsebine in nazadnje matematičnih procesov. Poglavje o kontekstu in vsebini poudarja lastnosti problema, s katerimi se srečujejo učenci kot državljani, poglavje o procesih pa poudarja kompetence, ki jih morajo učenci imeti in prikazati za reševanje problemov. Te kompetence so združene v tri kompetenčne razrede, kar omogoča racionalno obravnavo načinov naslavljanja večplastnih miselnih procesov pri ocenjevanju.

PRIMERI MATEMATIČNIH NALOG

Sledi izbor objavljenih nalog, ki ilustrirajo različne vidike matematične pismenosti raziskave PISA 2003. Pri posameznih delih nalog je dodan komentar, ki je namenjen opisovanju nalog in kategorij, ki omogočajo razporeditev nalog glede zahtevnosti.

Sledi 13 nalog s skupno 27 vprašanji. Vsa vprašanja so bila uporabljena v predraziskavi leta 2002, kot del procesa razvoja nalog za glavno raziskavo PISA 2003. Zaradi različnih vzrokov, v glavnem povezanih s potrebo po večplastni uravnoteženosti končnega instrumenta, ta vprašanja niso bila vključena v glavno raziskavo. Nekatera vprašanja imajo namreč merske lastnosti, zaradi katerih so manj primerna za uporabo v mednarodnem preizkusu, kljub temu pa so koristna kot ilustracija oziroma zgled za uporabo pri pouku.

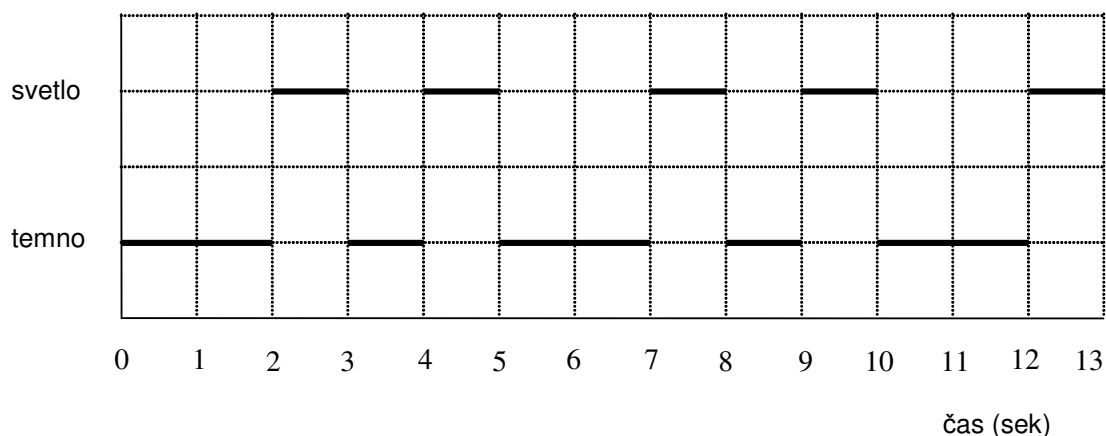
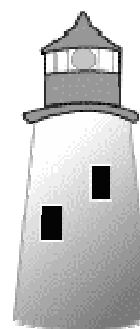
Nekatere izmed nalog in vprašanj v nadaljevanju so bili deloma predstavljeni že v predhodnih razdelkih, vendar so na tem mestu klasificirani v celoti, predstavljeni so rešitev, način ocenjevanja, morebitne težave pri reševanju in ugotovitve predraziskave o uspešnosti reševanja naloge oziroma vprašanja.

1. primer matematične naloge – SVETILNIK

Svetilniki so stolpi s svetlobnim signalom na vrhu. Svetilniki pomagajo ladjam na morju, da ponoči najdejo svojo pot, kadar plujejo blizu obale.

Svetlobni signal oddaja svetlobne bliske v ponavljajočem se vnaprej določenem vzorcu. Vsak svetilnik ima svoj vzorec.

V spodnjem diagramu vidiš vzorec določenega svetilnika. Svetlobni bliski se izmenjujejo s temnimi obdobji.



Vzorec je reden in se vsake toliko časa ponovi. Čas celotnega ciklusa vzorca, preden se začne ponovitev, se imenuje *perioda*. Ko prepoznaš periodo vzorca, ni težko podaljšati diagrama za naslednjih nekaj sekund, minut in celo ur.

1.1 vprašanje

Kateri izmed naslednjih časovnih intervalov bi lahko bil perioda vzorca danega svetilnika?

- A 2 sekundi.
- B 3 sekunde.
- C 5 sekund.
- D 12 sekund.

Točkovanje in opombe za vprašanje 1.1

Pravilen odgovor

Koda 1: C. 5 sekund.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena

Nenavaden način prikazovanja tega avtentičnega problema učencem uvršča vprašanje više od razreda *reproduciranja*. Grafični prikaz je nekaj novega za skoraj vse, če ne za vse učence. Naloga vključuje sposobnost interpretacije in sklepanja že od samega začetka problema. Večina učencev bo situacijo v mislih najbrž simulirala: temno-temno-svetlo-temno-svetlo-temno-temno-svetlo in tako naprej. Najti bodo morali »ritem« s pomočjo grafične predstavitve ali s kakšno drugo predstavitvijo, kot je na primer pravkar opisana. Ta aktivnost povezovanja med različnimi prezentacijami oziroma prikazi umešča problem v kompetenčni razred *povezovanja*.

Koncept periodičnosti ni pomemben le znotraj matematične discipline, temveč tudi v vsakdanjem življenju. Predraziskava je pokazala, da za večino učencev ta naloga ni bila težka kljub neobičajni predstavitvi.

1.2 vprašanje

Koliko sekund v eni minuti oddaja svetilnik svetlobne bliske?

- A 4
- B 12
- C 20
- D 24

Točkovanje in opombe za vprašanje 1.2

Pravilen odgovor

Koda 1: D. 24.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena

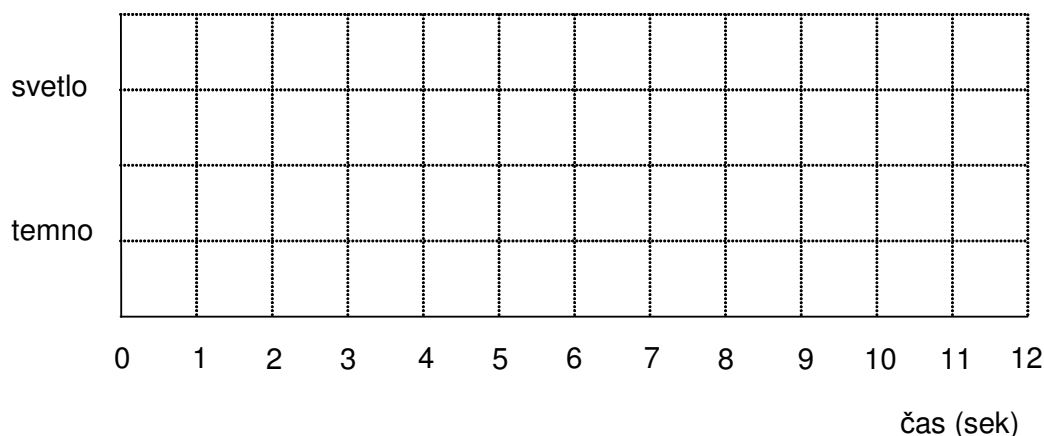
Ta primer je malo težji kot vprašanje 1.1, poleg tega pa je tudi narava problema nekoliko drugačna. Učenci morajo prevesti in razširiti vizualni model, ki ga imajo na voljo, v numerični model. Ta jim pomaga analizirati periodični vzorec v eni minuti. Ni nujno, da je učenec na vprašanje 1.1 odgovoril pravilno, vendar je uporaba rezultata iz prvega vprašanja eden izmed mogočih načinov reševanja drugega vprašanja: ker je obdobje 5, v eni minuti je 12 obdobj, in ker ima vsako obdobje 2 svetlobna bliska, mora biti pravilen odgovor 24.

Druga strategija, ki jo učenci na tej ravni lahko uporabijo, je pregled grafa za prvih 10 ali prvih 12 sekund, ker sta to številki, deljivi s 60. Če učenec pogleda graf za prvih 10 sekund, bo videl 4 svetlobne bliske, ki jih pomnoži s 6, in odgovor bo spet 24. To pa še ne dokazuje, da učenec v resnici razume problem. Enako velja namreč za 12 sekund: 4 svetlobne bliske pomnoži s 5 in učenec dobi odgovor 20, kar je narobe. Razlika je v tem, da dobi učenec pri izbiri 10 sekund natančno 2 periodi, pri izbiri 12 sekund pa ne dobi večkratnika periode.

To je avtentičen problem, ki ni prezahteven, sodi pa v razred *povezovanja*, med drugim tudi zaradi številnih korakov, ki jih mora učenec narediti na poti do rešitve.

1.3 vprašanje

V spodnji diagram nariši graf možnega vzorca svetlobnih bliskov svetilnika, ki oddaja svetlobne bliske 30 sekund na minuto. Perioda tega vzorca mora biti enaka 6 sekund.



Točkovanje in opombe za vprašanje 1.3

Pravilen odgovor

Koda 2: Odgovori, pri katerih graf prikazuje vzorec svetlobnih bliskov in temnih obdobj, ki ima v obdobju šestih sekund svetlobne bliske v skupni dolžini 3 sekunde in s periodo 6 sekund. Učenec to lahko naredi različno, in sicer:

- 1 enosekundni svetlobni blisk in 1 dvosekundni blisk (to je lahko prikazano različno) ali 1 trisekundni svetlobni blisk (kar je lahko prikazano na štiri različne načine).
- Če sta prikazani dve periodi, mora biti vzorec identičen za obe periodi.

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, pri katerih graf prikazuje vzorec svetlobnega bliska in temnih obdobj z bliski treh sekund v šestih sekundah, perioda pa ni dolga 6 sekund. Če sta prikazani dve periodi, mora biti vzorec identičen za obe periodi.

- 3 enosekundni svetlobni bliski, ki se izmenjujejo s 3 enosekundnimi temnimi obdobji.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: reflektiranje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena

Že sam zapis problema nakazuje njegovo odprtost: »Nariši graf *možnega* vzorca svetlobnih bliskov ...«. Čeprav se zdi, da je vprašanje tesno povezano s predhodno postavljenim vprašanjem, je bil odstotek pravih odgovorov precej nizek, zaradi česar to vprašanje sodi med precej težka vprašanja.

Od učencev se pri tem vprašanju zahteva, da oblikujejo ali skonstruirajo nekaj sami. To je pomemben vidik *matematične pismenosti*, namreč uporaba matematičnih kompetenc ne le pasivno oziroma s ponavljanjem aktivnosti, pač pa aktivno s samostojnim oblikovanjem rešitve. Reševanje problema ni trivialno, ker je treba zadostiti dvema pogojema: enaka količina svetlobe in teme (»30 sekund na minuto«) in zahtevana perioda šestih sekund. Ta kombinacija od učencev zahteva, da dobro razumejo pojem periodičnosti in ga znajo uporabiti v manj znanem kontekstu, kar kaže, da gre za kompetenčni razred *reflektiranja*.

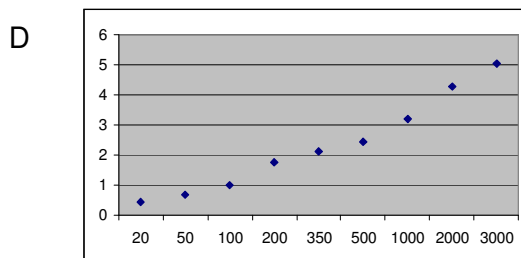
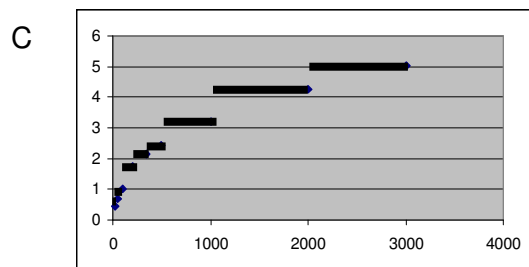
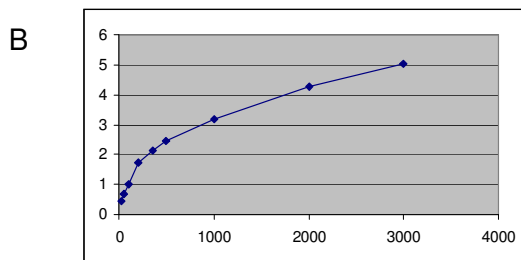
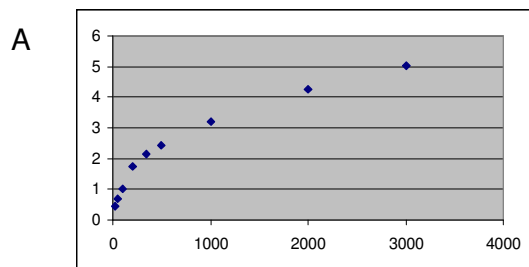
2. primer matematične naloge – POŠTNINA

Poštšina v Zedlandiji temelji na teži pošiljk, kot je prikazano v tabeli:

Masa (na gram natančno)	Cena
do 20 g	0,46 zeda
21 g–50 g	0,69 zeda
51 g– 100 g	1,02 zeda
101 g–200 g	1,75 zeda
201 g–350 g	2,13 zeda
351 g–500 g	2,44 zeda
501 g–1000 g	3,20 zeda
1001 g–2000 g	4,27 zeda
2001 g–3000 g	5,03 zeda

2.1 vprašanje

Kateri izmed spodnjih grafov je najboljši prikaz zaračunavanja poštnine v Zedlandiji (vodoravna os prikazuje maso v gramih, navpična os pa ceno v zedih)?



Točkovanje in opombe za vprašanje 2.1

Pravilen odgovor

Koda 1: C.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: negotovost

Situacija: javna oziroma širše družbena

Očitno je, da je situacija *javna oziroma širše družbena* in da se s takim problemom pogosto srečamo, vendar ne nujno v tej obliki. V vsakdanjem življenju ljudje pakete oddajo na pošti in tam vprašajo, koliko bo stala poština. Vendar pa se od ljudi pričakuje, da razmišljajo tudi o sistemu zaračunavanja poštnin in podobnih strukturah. Veliko ljudi bi vedelo, da je porast poštine sprva zelo velik, vendar se z večjo maso paketov porast poštine manjša. Ta struktura je precej običajna.

Da bi učenec ugotovil, da tako strukturo lahko prikažemo vizualno, pa je popolnoma drug vidik. Pravi graf na sliki je »stopničasti graf«, ki ga učenci zelo redko srečajo v šolskem učnem načrtu ali sploh ne. To je verjetno glavni razlog, zakaj je bilo to vprašanje za učence težko. Učenci se učijo, kako povezati točke v grafu in včasih se sprašujejo, ali naj točke v grafu povežejo z ravnimi črtami ali v obliki lepe krivulje, kot je prikazano v primeru B. Zdi se, da je B dober odgovor, ker podaja ceno za vsako maso, v primerjavi s primerom A, ki podaja le cene za izbrane vrednosti. Težava pa je, da je obseg vrednosti cen zelo omejen, cene pošiljk so lahko le: 0,46; 0,69; 1,02 in tako naprej. Graf B zato ni pravilen. Graf C ustreza predstavljeni razpredelnici mase in cene poštine.

Drugi dejavnik, ki otežuje povezovanje razpredelnice z grafom, je dejstvo, da je grafe A, B in C zaradi uporabljenih lestvic zelo težko brati za vrednosti prvih 500 gramov. Če učence zelo zanimajo najnižje vrednosti, bo zanje morda najbolj privlačen graf D, ker podaja interpretacijo razpredelnice, ki je ni težko prebrati. In lahko se zgodi, da učenci niti ne opazijo, da merska lestvica vodoravno ni linearna. Toda če učenci uvidijo, da graf z izoliranimi točkami ne more predstavljati zaračunavanja poštine, prikazane z razpredelnico (podobno kot pri grafu B), tega grafa seveda ne bodo upoštevali.

Iz vsega napisanega je mogoče razbrati, da gre za kompetenčni razred *povezovanja*, predvsem zaradi nenavadne predstavitve in interpretacijskih sposobnosti, ki so nujne za reševanje tega vprašanja.

2.2 vprašanje

Jan želi prijatelju poslati dva predmeta, eden tehta 40 gramov in drugi 80 gramov.

Glede na zaračunavanje poštnine v Zedlandiji pomagaj Janu določiti, ali je ceneje poslati oba predmeta kot en sam paket ali kot dva ločena paketa. Prikaži svoj izračun stroškov pošiljanja za obe možnosti.

Točkovanje in opombe za vprašanje 2.2

Pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, ki ugotavljajo, da bi bilo ceneje poslati predmeta kot dva ločena paketa. Cena za dva ločena paketa bo znašala 1,71 zeda in 1,75 zeda za en sam paket, ki bi vseboval oba predmeta.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: količina

Situacija: Javna oziroma širše družbena

Ta primer je bolj praktičen kot prejšnji, predraziskava pa je pokazala, da sodi med lažje.

Snovalci raziskave so nalogo uvrstili v kompetenčni razred *povezovanja*, ker naloga učencem ni znana in zahteva nekoliko več od samega reproduciranja. Odgovor o načinu pošiljanja dveh predmetov z maso 40 g in 80 g morda ni intuitiven, vendar ga z lahkoto najdemo v razpredelnici: 40 g pošiljka stane 0,69 zeda, 80 g pošiljka stane 1,02 zeda, torej dva paketa staneta 1,71 zeda. En paket, ki tehta 120 g, bi stal 1,75 zeda. Ta izračun matematično ni zahteven, predstavlja pa pomemben primer *matematične pismenosti*, saj se podobna vprašanja pojavljajo v različnih situacijah v posameznikovem življenju.

3. primer matematične naloge – SRČNI UTRIP

Iz zdravstvenih razlogov bi morali ljudje omejiti svoje napore, na primer. med športom, da ne bi presegli določene frekvence srčnega utripa.

Dolga leta je bil odnos med posameznikovim priporočenim maksimalnim srčnim utripom in njegovo starostjo opisan z naslednjo formulo:

$$\text{Priporočen maksimalni srčni utrip} = 220 - \text{starost}$$

Pred kratkim so raziskave pokazale, da je to formulo potrebno malo spremeniti. Nova formula je:

$$\text{Priporočen maksimalni srčni utrip} = 208 - (0,7 \cdot \text{starost})$$

3.1 vprašanje

V časopisnem članku je bilo zapisano: »Če uporabimo novo formulo namesto stare, se priporočeno maksimalno število utripov srca na minuto pri mladih ljudeh malo zniža, pri starejših pa malo zviša.«

Od katere starosti naprej se pri uporabi nove formule priporočeni maksimalni srčni utrip zviša? Prikaži svoje delo.

Točkovanje in opombe za vprašanje 3.1

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec odgovori 41 ali 40.

$220 - \text{starost} = 208 - 0,7 \cdot \text{starost}$, torej $\text{starost} = 40$, ljudje nad 40 let bodo po novi formuli imeli višji priporočeni maksimalni srčni utrip.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena ali osebna

Klasifikacija te situacije je seveda odvisna od tega, ali so mladi v resnici zainteresirani za podatke o svojem zdravju in telesu. Mirno lahko rečemo, da je to vprašanje nekoliko znanstveno zaradi uporabe formul, vendar veliko športnikov in športnic

(tekači, kolesarji, veslači itn.) med vadbo redno meri svoj srčni utrip. Instrumenti, ki uporabljajo mikrotehnologijo, so ta del človeške dobrobiti naredili bolj dostopen vsem ljudem. To pojasnjuje, zakaj je ta situacija uvrščena kot *javna* oziroma *širše družbena* oziroma *osebna*.

Ker se v vprašanju v resnici ukvarjamo bolj z modeliranjem in manj s trivialnim reševanjem problemov, je kompetenčni razred *povezovanja* precej logičen, kot tudi to, da sodi v vsebinski sklop *spremembe in odnosi*.

Primerjava dveh formul, čeprav gre za približno oceno, ki sta povezani s posameznikovo dobrobitjo, je lahko zanimiva aktivnost, še posebno, ker sta formuli delno predstavljeni z besedami in ne le s številkami. Tudi če ne postavimo vprašanja, bi bila lahko prvoten odziv učenca ta, da bi poskušal ugotoviti, kako bi njegova starost vodila do različnih rezultatov tega testa. Učenci v raziskavi PISA so stari 15 let, zato je rezultat za njih po stari formuli 205 utripov na minuto, po novi formuli pa je 198 (ali 197). Tako jih lahko primerjava za njihovo starost napelje na to, da je izjava v časopisnem članku pravilna.

Vendar pa je postavljeno vprašanje nekoliko bolj večplastno. Od učencev namreč zahteva, da ugotovijo, kdaj oziroma pri kateri starosti je rezultat obeh formul enak. Do te ugotovitve lahko učenec pride s poskušanjem (kar je strategija številnih učencev) ali pa algebraično način: $220 - a = 208 - (0,7 \cdot a)$, kar vodi do odgovora približno 40.

Tako za ugotavljanje *matematične pismenosti* kot znanja matematike, ki se zahteva v učnih načrtih, je problem zanimiv in pomemben. Rezultati predriziskave so pokazali, da je bil za 15-letne učence ta problem precej zahteven.

3.2 vprašanje

Formula *priporočen maksimalni srčni utrip* = $208 - (0,7 \cdot \text{starost})$ se uporablja, da ugotovimo, kdaj je fizični trening najbolj učinkovit. Raziskave so pokazale, da je fizični trening najbolj učinkovit, ko srčni utrip doseže 80 odstotkov priporočenega maksimalnega srčnega utripa.

Napiši formulo za izračun srčnega utripa za najbolj učinkovit fizični trening glede na starost.

Točkovanje in opombe za vprašanje 3.2

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec napiše formulo, ki je ekvivalentna množenju formule priporočenega maksimalnega srčnega utripa z 80 odstotki.

- srčni utrip = $166 - 0,56 \cdot \text{starost}$
- srčni utrip = $166 - 0,6 \cdot \text{starost}$
- $h = 166 - 0,56 \cdot a$

- $h = 166 - 0,6 \cdot a$
- $\text{srčni utrip} = (208 - 0,7 \text{ starost}) \cdot 0,8$

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena ali osebna

Zdi se, da meri to vprašanje enake kompetence kot vprašanje 3.1. Odstotek pravilnih odgovorov je skoraj identičen (to je pokazala predraziskava). Vendar obstaja razlika: v vprašanju 3.1 morajo učenci primerjati dve formuli in se odločiti, kdaj obe formuli dasta enak rezultat. Pri vprašanju 3.2 pa morajo učenci »sestaviti« formulo, to pa je nekaj, kar se od njih v šoli ponavadi ne zahteva. Z matematičnega stališča to vprašanje sploh ni zahtevno. Formulo je treba pomnožiti z 0,8, da se dobi končna formula $\text{srčni utrip} = (208 - 0,7 \text{ starost}) \cdot 0,8$. Zdi se, da celo tak preprost matematičen izraz, izražen v praktičnem in realističnem kontekstu, predstavlja velik izziv številnim 15-letnikom.

4. primer matematične naloge – PLAČILO PO POVRŠINI

Ljudje, ki živijo v večstanovanjski hiši, so se odločili, da jo kupijo. Denar za plačilo bodo zbrali tako, da bo vsakdo prispeval vsoto, ki je sorazmerna z velikostjo njihovega stanovanja.

Moški, ki na primer živi v stanovanju, ki obsega petino talne površine vseh stanovanj, bo plačal petino celotne cene stavbe.

4.1 vprašanje

V spodnji tabeli za vsako trditev obkroži drži ali ne drži.

Trditev	drži / ne drži
Oseba, ki živi v največjem stanovanju, bo za kvadratni meter svojega stanovanja plačala več kot oseba, ki živi v najmanjšem stanovanju.	drži / ne drži
Če poznamo površino dveh stanovanj in ceno enega izmed njiju, lahko izračunamo ceno drugega.	drži / ne drži
Če poznamo ceno cele stavbe in vsoto, ki jo bo plačal vsak lastnik, potem lahko izračunamo skupno površino vseh stanovanj.	drži / ne drži
Če bi se skupna cena stavbe znižala za 10 odstotkov, bi vsak izmed lastnikov plačal 10 odstotkov manj.	drži / ne drži

Točkovanje in opombe za vprašanje 4.1

Pravilen odgovor

Koda 1: Vsi štirje odgovori pravilni: ne drži, drži, ne drži, drži; v tem vrstnem redu.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Katera koli druga kombinacija odgovorov.

Tip vprašanja: večplastno vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: javna oziroma širše družbena

To vprašanje zahteva precej visoko raven sposobnosti sklepanja na področju sorazmerja in je povezano s praktičnim kontekstom v družbi, ki je 15-letnikom verjetno precej nepoznan. Večplastno vprašanje izbirnega tipa, uporabljeno v tem

primeru, od učencev zahteva, da prikažejo precej natančno razumevanje vključenih pojmov. Poleg tega se od učencev zahteva, da preberejo in razumejo večplastne matematične predpostavke. V predraziskavi se je izkazalo, da je to vprašanje precej težko.

4.2 vprašanje

V stavbi so tri stanovanja. Največje stanovanje 1 meri 95 kvadratnih metrov. Stanovanje 2 meri 85 kvadratnih metrov in stanovanje 3 70 kvadratnih metrov. Prodajna cena stavbe je 300 000 zedov.

Koliko naj bi plačal lastnik stanovanja 2? Prikaži svoj izračun.

Točkovanje in opombe za vprašanje 4.2

Pravilen odgovor

Koda 2: Učenec odgovori 102 000 zedov, z ali brez prikaza izračuna. Enota ni potrebna. Na primer:

- Stanovanje 2: 102 000 zedov
- Stanovanje 2: $\frac{85}{250} \cdot 300\,000 = 102\,000$ zedov
- $\frac{300\,000}{250} = 1200$ zedov za vsak kvadratni meter, torej stanovanje 2 stane 102 000 zedov.

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Učenec uporabi pravi postopek, vendar naredi manjšo računsko napako.

- Stanovanje 2: $\frac{85}{250} \cdot 300.000 = 10.200$ zedov

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: količina

Situacija: javna oziroma širše družbena

Vprašanje 4.2 je bolj konkreten primer, ki vključuje čisto prava stanovanja z realnimi velikostmi. Rezultati predraziskave potrjujejo, da je tako vprašanje precej lažje od bolj abstraktnega prvega vprašanja v tej nalogi.

Vprašanje sodi v kompetenčni razred *povezovanja*, ker rešitev zahteva več korakov, problem pa je postavljen v kontekst, ki učencem ni domač.

5. primer matematične naloge – VIŠINA UČENCEV

5.1 vprašanje

Nekega dne so pri pouku matematike izmerili višino vseh učencev. Povprečna višina dečkov je bila 160 cm, povprečna višina deklic pa 150 cm. Alenka je bila najvišja – njena višina je bila 180 cm. Zdenko je bil najmanjši – njegova višina je bila 130 cm.

Dva učenca sta tisti dan manjkala, pri pouku pa sta bila spet naslednji dan. Njuni višini sta bili izmerjeni in povprečje na novo izračunano. Presenetljivo se povprečna višina deklic in povprečna višina dečkov ni spremenila.

Katerega izmed naslednjih sklepov lahko potrdiš iz teh informacij?

Pri vsakem sklepu obkroži da ali ne.

Sklep	Da ali ne?
Oba manjkajoča učenca sta deklici.	da / ne
En manjkajoči učenec je deček, drugi pa deklica.	da / ne
Oba manjkajoča učenca sta enako velika.	da / ne
Povprečna višina vseh učencev se ni spremenila.	da / ne
Zdenko je še vedno najmanjši.	da / ne

Točkovanje in opombe za vprašanje 5.1

Pravilen odgovor

Koda 1: Ne pri vseh odgovorih.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Katera koli druga kombinacija odgovorov.

Tip vprašanja: večplastno vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: reflektiranje

Vsebinski sklop: negotovost

Situacija: izobraževalna

Klasifikacija pri tem vprašanju je precej jasna. Vsebinski sklop je *negotovost*, ker naloga zahteva razumevanje statističnih konceptov. Situacija je *izobraževalna*, ker je to tip problema, s katerim bi se učenci tudi v resnici lahko srečali v šolskem prostoru. Vprašanje sodi v kompetenčni razred *reflektiranja*, saj je komunikacija precej zahtevna – učenci morajo zares razumeti jezik in pojme, ki so razmeroma zapleteni in zahtevni za razumevanje. Problem vključuje sposobnost postavljanja vprašanj, kot so Kako vem?, Kako najdem?, Kaj se lahko zgodi?, Kaj bi se zgodilo, če ...?, in sposobnost razumevanja ter uporabe matematičnih pojmov, kot je povprečje v situacijah, ki so večplastne.

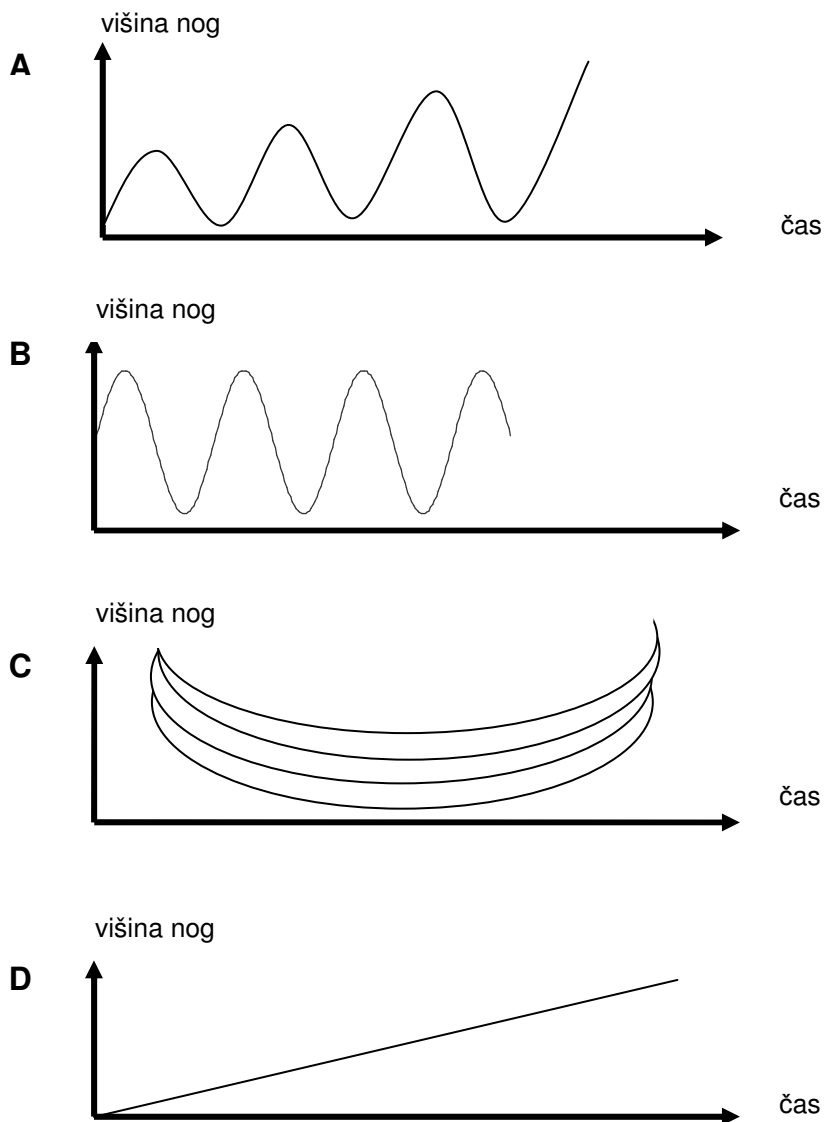
Matematizacija (prepoznavanje relevantne matematične vsebine in informacije) je v tem vprašanju zelo pomembna. Površno branje vodi do napačne interpretacije. Situacija se spreminja znotraj razreda in s časom. Beseda pouk se uporablja, ker se število učencev v razredu spreminja s časom. Situacija se spreminja tudi s časom, saj dva učenca na začetku nista navzoča, ko pa sta naslednji dan vključena v merjenje, povprečji ostaneta nespremenjeni. Število učencev se poveča, ne ve pa se, ali sta dva dodatna učenca deklici, dečka ali deček in deklica. Učenci morajo pri razmišljanju upoštevati tako razlike v številu učencev pri pouku kot tudi spremembe v zahtevanem povprečju. Enkrat je omenjeno ločeno povprečje za dečke in za deklice, nato je omenjeno povprečje višin celotnega razreda. Da bi učenci lahko pravilno proučili pet sklepov te naloge, morajo raziskati precej zapleten način povezovanja med podatki in statističnimi povzetki iz teh podatkov. Predraziskava je pokazala, da je bilo za učence to vprašanje velik izziv.

6. primer matematične naloge – GUGALNICA

6.1 vprašanje

Miha sedi na gugalnici. Začne se gugati. Poskuša se čim višje dvigniti.

Kateri diagram najbolje prikazuje višino njegovih nog nad tlemi, ko se guga?



Točkovanje in opombe za vprašanje 6.1

Pravilen odgovor

Koda 1: A.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: osebna

Taka vrsta vprašanja je v nekaterih državah precej priljubljena: ugotavljanje, kateri grafični prikaz ustreza danemu opisu. Leta 1970 je kanadski učitelj matematike Janvier promoviral tako obliko vprašanja tako, da je učence prosil, naj določijo dirkalno stezo, ki bi najbolj ustrezala podanemu grafu hitrosti. Vprašanje je torej postavil v obratni smeri. Podobno vprašanje je bilo uporabljeno v raziskavi PISA 2000 in ga je mogoče najti v publikaciji *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment* (OECD, Pariz, 2002a).

V primeru gugalnice se vprašanje zdi lažje kot vprašanje iz raziskave PISA 2000, ker lahko skoraj takoj opustimo nekatere alternative, česar pa ni bilo mogoče narediti pri vprašanju o dirkalni stezi.

Hitro lahko opazimo, da odgovor A najbolj ustreza vprašanju. Odgovor B se ne začne s spuščnimi nogami in se ne zvišuje z vsakim nihajem gugalnice. Odgovor C je samo grafična upodobitev nihanja gugalnice (ne v odvisnosti od časa), D pa sploh ne niha.

Vprašanje sodi v kompetenčni razred *povezovanja*, ker mora učenec interpretirati in povezati najmanj dve reprezentaciji, besedno in grafično, in povezati ustrezen graf z besedilom. Poznavanje konteksta lahko pomaga pri zbiru pravilnega odgovora. Učenci morajo razumeti graf v koordinatnem sistemu, ki jim je sicer domač, medtem ko jim grafični prikazi morda niso tako domači.

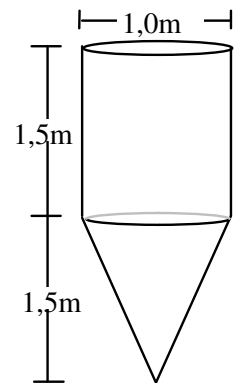
7. primer matematične naloge – CISTERNA ZA VODO

7.1 vprašanje

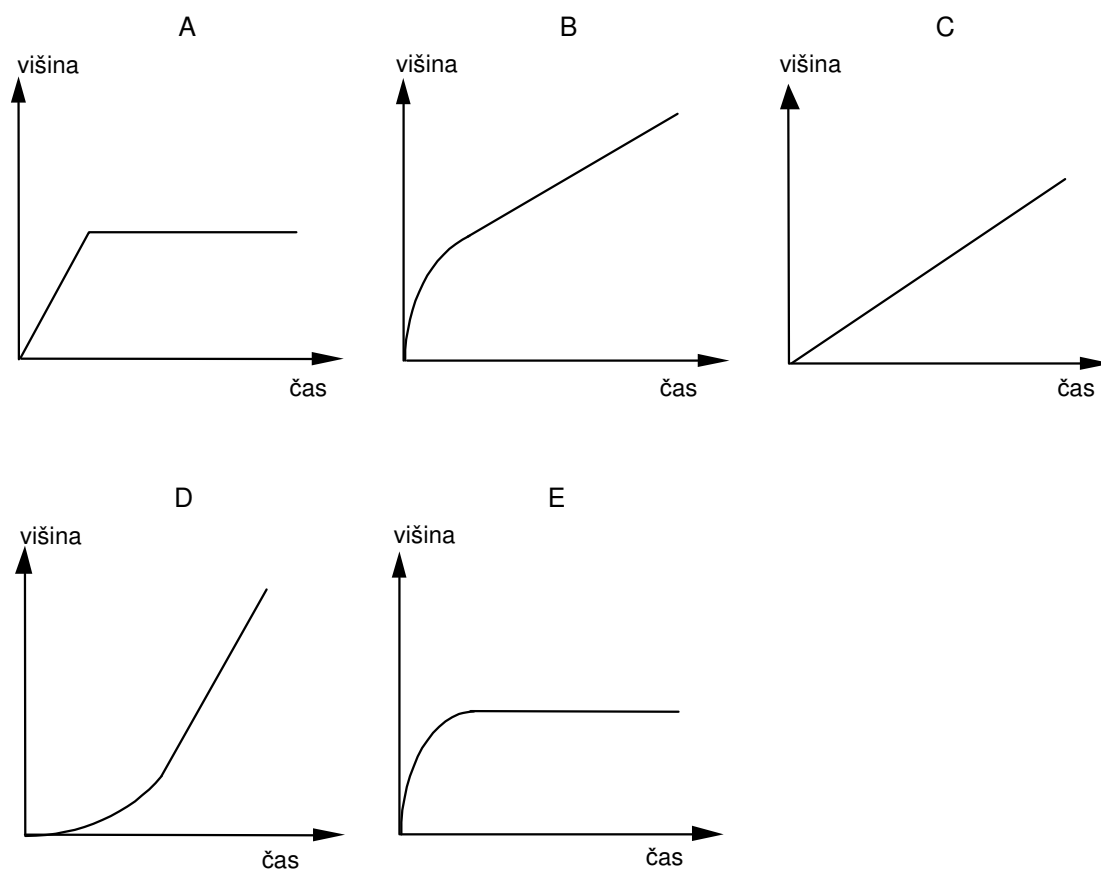
Vodni rezervoar ima obliko in mere, kot so prikazane na sliki.

Na začetku je rezervoar prazen. Nato vanj začne teči voda v razmerju en liter na sekundo.

Kateri izmed naslednjih grafov prikazuje, kako se vodna gladina v rezervoarju spreminja s časom?



Vodni
rezervoar



Točkovanje in opombe za vprašanje 7.1

Pravilen odgovor

Koda 1: B.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: znanstvena

Vprašanje ni zelo večplastno in ga ni težko razumeti, sestavljata ga kratko besedilo in jasen diagram. Od učencev se zahteva, da povežejo besedilo in diagram ter nato svoje razumevanje navežejo na grafično predstavitev. Te kompetence sodijo v razred *povezovanja*.

Zanimivo je, da ima to vprašanje kar nekaj odvečnih informacij. Velikost rezervoarja je natančno dana in razmerje količine vode, ki priteče na časovno enoto, je natančno

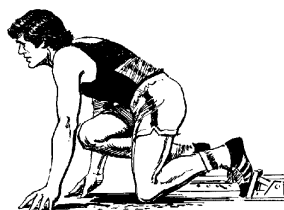
zapisano. Vendar vse te informacije učencu ne pomagajo, saj so grafi samo »približni« oziroma »kvalitativni« in nimajo enot. To ni običajno, ker se odvečne informacije po navadi ne pojavljajo v matematičnih vprašanjih, se pa odvečnost informacij pojavlja skoraj pri vseh problemih v realnem življenju. Pravzaprav je pomemben del procesa *matematizacije* prepoznavanje relevantne matematike in odstranjevanje odvečnih informacij.

Čeprav je bilo to vprašanje uvrščeno med vprašanja z *znanstveno* situacijo, se podobni problemi pojavljajo v *osebni* situaciji vsakega posameznika. Polnjenje kozarca ali vaze ali lavorja, še posebno, ko predmeti niso ovalne oblike, lahko posameznika preseneti, če ta ne upošteva, da je hitrost naraščanja tekočine odvisna od oblike cisterne, tako znanje pa sodi k *matematični pismenosti*.

8. primer matematične naloge – ODZIVNI ČAS

Na tekaškem tekmovanju je odzivni čas časovni interval med pokom startne pištole in trenutkom, ko atlet zapusti startni blok. Končni čas vključuje tako odzivni čas kot tudi čas teka.

Tabela prikazuje odzivni čas in končni čas osmih tekačev sprinta na 100 metrov.



Proga	Odzivni čas (sek)	Končni čas (sek)
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	Ni končal sprinta.
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

8.1 vprašanje

Poišči dobitnika zlate, srebrne in bronaste medalje tega teka. V spodnjo tabelo vpiši številko proge dobitnika posamezne medalje, njegov odzivni čas in njegov končni čas.

Medalja	Proga	Odzivni čas (sek)	Končni čas (sek)
ZLATO			
SREBRO			
BRON			

Točkovanje in opombe za vprašanje 8.1

Pravilen odgovor

Koda 1:

Medalja	Proga	Odzivni čas (sek)	Končni čas (sek)
ZLATO	3	0,197	9,87
SREBRO	2	0,136	9,99
BRON	6	0,216	10,04

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: reproduciranje

Vsebinski sklop: količina

Situacija: znanstvena

To vprašanje sodi v razred *reproduciranja* in se ukvarja z razumevanjem decimalnih zapisov, večplastnost pa je dodana z odzivnim časom, ki nujno ne odgovarja na prvo vprašanje. Vsebinski sklop *količina* je zato očiten, nekoliko več možnosti pa je za opredelitev situacije. Snovalci raziskave PISA so se odločili, da je situacija *znanstvena*.

Skoraj dve tretjini učencev, ki so sodelovali v predraziskavi, je na vprašanje odgovorila pravilno, kar pomeni, da je to vprašanje precej lahko.

8.2 vprašanje

Do danes se še nobenemu človeku ni uspelo odzvati na startno pištolo v času, krajšem od 0,110 sekunde. Če je zabeležen odzivni čas tekača pod časom 0,110 sekunde, velja, da je prišlo do neveljavnega starta, saj je tekač zapustil start, še preden je slišal pištolo.

Ali bi imel dobitnik bronaste medalje možnost, da osvoji srebrno medaljo, če bi imel hitrejši odzivni čas? Svoj odgovor podpri z razlago.

Točkovanje in opombe za vprašanje 8.2

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec odgovori pritrdilno in ustrezno razloži. Na primer:

- Da. Če bi bil njegov odzivni čas za 0,05 sekunde hitrejši, potem bi izenačil čas drugega mesta.
- Da, imel bi možnost, da osvoji srebrno medaljo, če bi bil njegov odzivni čas krajši ali enak 0,166 sekunde.

- Da, z najhitrejšim mogočim odzivnim časom bi dosegel končni čas 9,93, kar je dovolj dobro za srebrno medaljo.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori, vključno s pritrdilnimi odgovori, vendar brez ustrezne razlage.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred:: povezovanje

Vsebinski sklop: kvantiteta

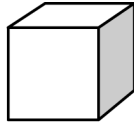
Situacija: znanstvena

To vprašanje zahteva zmerno stopnjo pisnega izražanja, pa tudi matematičnega sklepanja. Če je učenec pravilno odgovoril na vprašanje 8.1, takoj uvidi, da je tekač na progi 6 (bronasta medalja) začel počasi (pravzaprav je najpočasnejši od vseh) in da je tekač na progi 2 (srebrna medalja) začel teči zelo hitro (najhitreje od vseh), končala pa sta s skoraj enakim končnim časom (razlika je le 0,05 sekunde). Tekoč na progi 6 bi lahko dobil srebrno medaljo, če bi bil njegov odzivni čas krajši, ker je bila razlika njunih odzivnih časov precej večja kot razlika v njunih končnih časih.

Zaradi sposobnosti interpretacije, ki je nujna, in ne čisto preprostih primerjav decimalnih števil z različnim zaokroževanjem sodi to vprašanje v kompetenčni razred *povezovanja*.

9. primer matematične naloge – KOCKE

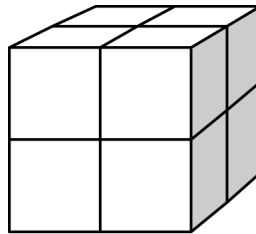
Suzana rada gradi velike bloke iz majhnih kock, kakršna je na primer prikazana na spodnji sliki.



majhna kocka

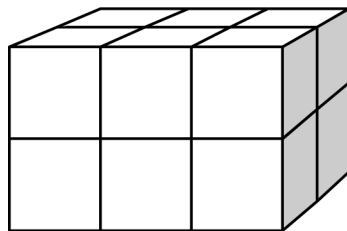
Suzana ima veliko takih majhnih kock. Za izdelavo večjih blokov uporablja lepilo, da združi manjše kocke skupaj.

Suzana zlepi skupaj osem malih kock, da nastane večja kocka, prikazana na sliki A.

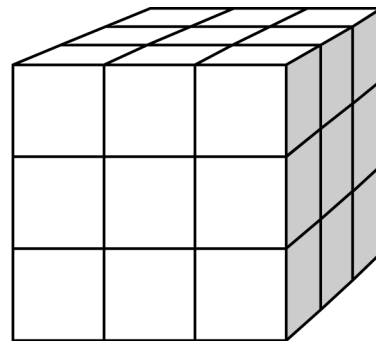


slika A

Nato Suzana naredi še bloka, prikazana na sliki B in sliki C.



slika B



slika C

9.1 vprašanje

Koliko majhnih kock bo Suzana potrebovala, da naredi blok, prikazan na sliki B?

Odgovor: kock.

Točkovanje in opomba za vprašanje 9.1

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec napiše 12 kock.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: reproduciranje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: osebna

V vsakem naboru vprašanj je treba imeti tako lahka kot težka vprašanja. To vprašanje je zelo lahko: učenec si problem z lahkoto predstavlja, ker je verjetno sam pogosto uporabljal podobne kocke (Duplo, Lego ipd.) in do pravilnega odgovora lahko pride brez uporabe množenja. V diagramu B učenec vidi prvih šest kock in ve, da je šest kock še zadaj. Zaradi seznanjenosti učencev z vsebino vprašanja, pa tudi zaradi preprostosti vprašanja, to spada v kompetenčni razred *reproduciranja*.

9.2 vprašanje

Koliko majhnih kock bo potrebovala Suzana, da naredi velik trden blok, prikazan na sliki C?

Odgovor: kock.

Točkovanje in opomba za vprašanje 9.2

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec napiše 27 kock.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: reproduciranje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: osebna

Vprašanje 9.2 se razlikuje od vprašanja 9.1 v tem, da je število kock nekoliko višje (27 namesto 12), konceptualno pa gre za enako vprašanje. Podatki iz predraziskave so

pokazali, da je bilo tudi to vprašanje za učence razmeroma lahko. To je bilo pričakovati zaradi čisto osnovnih kompetenc, ki jih posameznik potrebuje, da reši ta problem. Strokovnjaki sodelujočih držav se strinjajo, da so vprašanja, kot je to, podobna vprašanjem v njihovih učnih načrtih.

9.3 vprašanje

Suzana ugotovi, da je uporabila več majhnih kock, kot bi jih v resnici potrebovala, da bi naredila veliko kocko, kakršna je na sliki C. Ugotovi, da bi lahko skupaj zlepila majhne kocke tako, da bi bile videti tako, kot prikazuje slika C, vendar bi bil njen blok v notranjosti votel.

Katero je minimalno število majhnih kock, ki jih potrebuje, da naredi velik blok, kot je tisti na sliki C, vendar v notranjosti votel?

Odgovor: kock.

Točkovanje in opomba za vprašanje 9.3

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec napiše 26 kock.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: osebna

Vprašanje 9.3 predpostavlja, da delamo s posameznimi kockami in jih zato potrebujemo 27, ker bi se drugače velika kocka zrušila. Če nam je dovoljeno, da uporabimo lepilo, lahko naredimo kocko, kakršna je prikazana na sliki C, z manjšim številom kock. Čeprav je očiten odgovor 26 (odvzeta je sredinska kocka), lahko ugotovimo še marsikaj. Problem je, da vprašanje ne določa eksplicitno, da mora biti blok C videti enako z vseh smeri. Lahko bi namreč odvzeli več malih kock, da dobimo izdelek, prikazan na sliki C, če nam je dopuščeno, da uporabljamo lepilo. Vendar pa je posredno omenjeno, da mora biti velik blok v notranjosti votel, kar pomeni, da bi ob odstranitvi več kock ne dobili votlega območja (saj to ne bi imelo notranjosti). Zaradi vsega tega z jezikovnega stališča in interpretacije vprašanje ne spada med čisto neposredna vprašanja.

Vprašanje iz različnih vzrokov lahko uvrstimo v kompetenčni razred *povezovanja*. *Matematizacija* namreč zahteva dojemanje bistva vprašanja in potrebo po predstavitvi slike C kot votle kocke ter sklepanje in razmišljanje, s katerima se lahko pride do pravega odgovora, ter pomanjkanje standardnih postopkov ali algoritmov.

9.4 vprašanje

Zdaj Suzana želi narediti večji blok, ki bo dolg šest majhnih kock, širok 5 majhnih kock in visok 4 majhne kocke. Želi uporabiti najmanjše mogoče število majhnih kock tako, da bo v notranjosti bloka pustila največji mogoč votel prostor.

Katero je minimalno število majhnih kock, ki jih bo Suzana potrebovala, da naredi tako kocko?

Odgovor: kock.

Točkovanje in opomba za vprašanje 9.4

Pravilen odgovor

Koda 1: Učenec napiše 96 kock.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: refleksija

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: osebna

Pri vprašanju 9.4 moramo domnevati (zaradi načina, kako je problem podan), da lahko spet uporabimo lepilo. Problem, ki se pojavi, lahko podamo takole: »Katero je minimalno število majhnih kock, potrebnih za izgradnjo votlega bloka, velikosti $6 \cdot 5 \cdot 4$?«

Kot je bilo omenjeno že v prejšnjem vprašanju, tudi v tem primeru učencu niso na voljo standardni postopki reševanja problemov. Če si ustvarimo v mislih predstavo ene manjkajoče majhne kocke znotraj $3 \cdot 3 \cdot 3$ velike zgradbe, je nov problem čisto drugačne narave. Namesto da morajo v mislih odstraniti eno kocko, morajo učenci izumiti bolj splošno metodo reševanja, ki vključuje matematično sklepanje. Zato je to vprašanje smiselno uvrščeno v kompetenčni razred *reflektiranja*.

Kako lahko učenci najdejo pravi odgovor? Dober način bi bil, da učenec začne z maksimalnim številom kock: $6 \cdot 5 \cdot 4$ je skupaj 120. Nato mora učenec odvzeti čim večje število iz sredine bloka. Ker je ta dolg 6 kock, lahko odvezemo 4; ker je širok 5 kock, lahko odvezemo 3, ker je visok 4 kocke, lahko odvezemo 2. Torej $4 \cdot 3 \cdot 2$, kar je skupaj 24. Torej dobimo $120 - 24 = 96$, kar je pravilno. To je dobra strategija, ki kaže resnično razumevanje. Zanimivo bi bilo vprašati učence po razlagi njihovega sklepanja, da bi ugotovili koristne tehnike poučevanja.

Drug način bi bil, da si ogledamo stene, ki so potrebne, da dobimo želeni blok. V tem primeru bi bila v veliko pomoč slika. Da bi zgradili sprednjo steno, potrebujemo $5 \cdot 4$ kock; za zadnjo steno prav tako potrebujemo $5 \cdot 4$ kock. Za stransko steno *ne*

potrebujemo $6 \cdot 4$ kock, ker že imamo pokrit sprednji in zadnji del. Dolžina stranskih sten zato ni 6, temveč 4, kar zahteva $4 \cdot 4$ kock za vsako stran. Na koncu moramo pokriti še spodnji in zgornji del in pri tem izpustimo, kar že imamo. To znese dodatnih $3 \cdot 4$ kock. Vse to skupaj znese: $5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4$, kar je 96.

Nedvomno bodo učenci uporabljali različne načine. Raziskava, kakršna je PISA, se lahko uporablja za ugotavljanje, katere načine uporabljajo ali izdelajo (Izdelati način se mi ne zdi najbolj ustrezno. Mogoče: se ga domislijo) učenci, ko se srečajo s tako večplastnim problemom, pri katerem je možnost reševanja in prikazovanja rešitve v tradicionalnem smislu omejena.

Ta problem pomeni izziv. Oblikovno je skoraj čisto matematičen, kljub vsemu pa zahteva sposobnosti in spretnosti, kot je prostorska vizualizacija, ki je bistvenega pomena za pismenost v matematiki.

10. primer matematične naloge – KONCENTRACIJA ZDRAVIL

10.1 vprašanje

Ženska v bolnišnici prejme vbrizg penicilina. Njeno telo postopoma razgradi penicilin tako, da eno uro po injekciji ostane aktivnega le 60 odstotkov penicilina.

Ta vzorec se nadaljuje: po koncu vsake ure ostane aktivnega le 60 odstotkov penicilina, ki je bil navzoč ob koncu prejšnje ure.

Predpostavimo, da je odmerek, ki ga je ženska prejela ob 8. uri zjutraj, vseboval 300 miligramov penicilina.

Dokončaj tabelo, ki prikazuje količino penicilina, ki bo ostal aktiven v krvi ženske v enournih intervalih, od 8. do 11. ure.

Čas	8.00	9.00	10.00	11.00
Penicilin (mg)	300			

Točkovanje in opombe za vprašanje 10.1

Pravilen odgovor

Koda 2: Odgovori, ki vsebujejo vse tri pravilne vnose v tabelo. Na primer:

Čas	8.00	9.00	10.00	11.00
Penicilin (mg)	300	180	108	64,8 ali 65

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, ki vsebujejo enega ali dva pravilna vnosa v tabelo.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

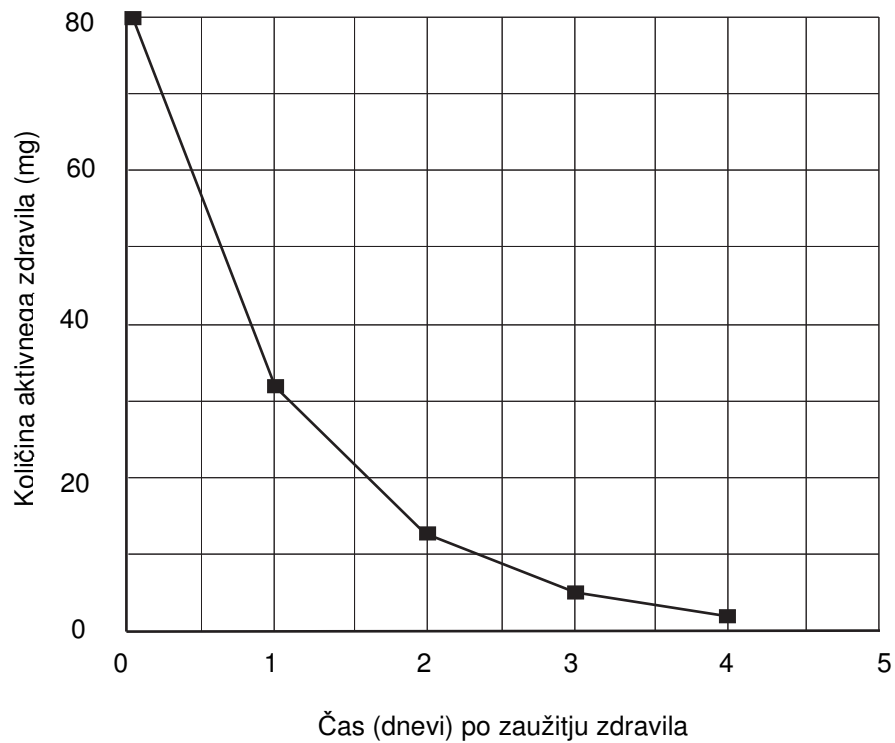
Situacija: znanstvena

Vprašanje se zdi precej nezahtevno, toda eksponentno razpadanje učencem ni dobro poznano: 60 odstotkov od 60 odstotkov od 60 odstotkov od ... Pravilo je lahko videti preprosto, vendar so rezultati dosežkov pri vprašanjih, kot je ta, pokazali, da ni tako. Čeprav učenci že v osnovni šoli kar obsežno obravnavajo odstotke, tega znanja pogosto niso pripravljeni uporabljati v drugih kontekstih. V tem vprašanju učenci namreč potrebujejo razumevanje odstotnega oziroma eksponentnega razpada (ne nujno razumevanje izrazov samih po sebi, temveč koncepta), prepoznavanje začetne vrednosti (300) in večkratno uporabo istega procesa.

Zanimivo je, da v predraziskavi kar 50 odstotkov učencev ni pravilno odgovorilo na vprašanje. To je pomemben podatek za ocenjevanje kakovosti oziroma učinkovitosti procesa učenja in poučevanja.

10.2 vprašanje

Peter mora jemati 80 mg zdravila za uravnavanje krvnega tlaka. Spodnji graf prikazuje začetno količino zdravila in količino, ki ostane aktivna v Petrovi krvi po enem, dveh, treh in štirih dneh.



Koliko zdravila ostane aktivnega ob koncu prvega dne?

- A 6 mg.
- B 12 mg.
- C 26 mg.
- D 32 mg.

Točkovanje in opombe za vprašanje 10.2

Pravilen odgovor

Koda 1: D. 32 mg.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: reproduciranje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: znanstvena

To vprašanje je lažje od prejšnjega in ne zahteva nič več kot branje grafa, ki vodi k ugotovitvi. Za to vprašanje so potrebne le kompetence *reproduciranja* in nekaj interpretacije.

10.3 vprašanje

Iz grafa pri prejšnjem vprašanju je razvidno, da vsak dan približno enak delež zdravila prejšnjega dne ostane aktiven v Petrovi krvi.

Kateri izmed naslednjih odstotkov je približen odstotek zdravila prejšnjega dne, ki ostane aktiven ob koncu vsakega dne?

- A 20 odstotkov
- B 30 odstotkov
- C 40 odstotkov
- D 80 odstotkov

Točkovanje in opombe za vprašanje 10.3

Pravilen odgovor

Koda 1: C. 40 odstotkov

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

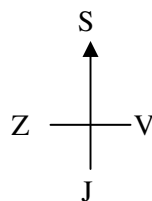
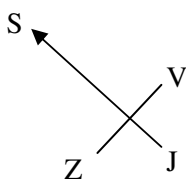
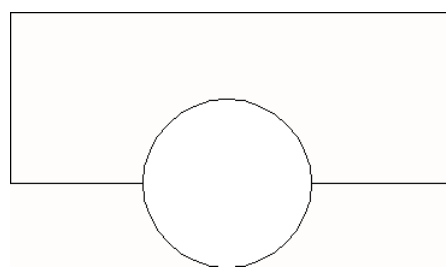
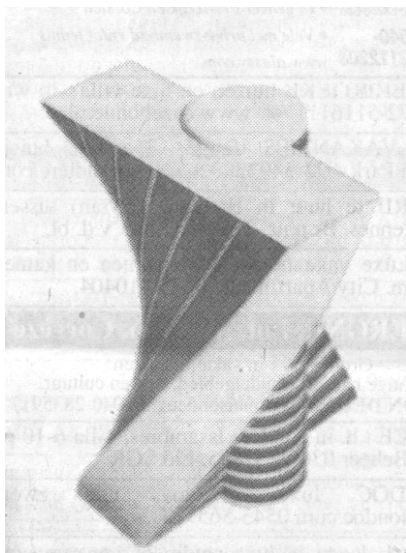
Situacija: znanstvena

Vprašanje 10.3 se navezuje na graf, predstavljen v vprašanju 10.2. Sprašuje po odgovoru na vprašanje Kolikšen je odstotek razgradnje? v tej točno določeni situaciji. Predstavitev tega vprašanja v obliki izbirnega tipa dopušča učencem, da rešijo nalogo na dva načina. Lahko pridejo do odgovora z računanjem, če so pravilno rešili

vprašanje 10.2. in poznajo začetno vrednost 80 ter vrednost ob koncu prvega dne 32. Če pa so preskočili vprašanje 10.2, si lahko pomagajo z grafom, ocenijo vrednost prvega dne s 30 in dobijo približno $30/80=3/8$, kar je precej blizu 40 odstotkom. Zaradi zahtev interpretacije tega vprašanja to sodi v kompetenčni razred *povezovanja*.

11. primer matematične naloge – ZVITA STAVBA

V sodobni arhitekturi imajo stavbe pogosto nenavadne oblike. Spodnja slika prikazuje računalniški model zvite stavbe in načrt pritličja. Kompas s smermi neba prikazuje orientacijo stavbe.



V pritličju stavbe sta glavni vhod in prostor za trgovine. Nad pritličjem je 20 nadstropij s stanovanji.

Načrt vsakega nadstropja je podoben načrtu pritličja, vendar ima vsako nadstropje malce drugačno orientacijo od nadstropja pod njim. Valj vsebuje jašek za dvigalo in podest na stopnišču v vsakem nadstropju.

11.1 vprašanje

Oceni skupno višino stavbe v metrih. Razloži, kako si prišel do svojega odgovora.

Točkovanje in opombe za vprašanje 11.1

Pravilen odgovor

Koda 2: Odgovori od 50 do 90 metrov, s pravilno razlago. Na primer:

- Višina enega nadstropja stavbe je približno 2,5 metra. Med nadstropji je nekaj dodatnega prostora. Od tod ocena $21 \cdot 3 = 63$ metrov.
- Vsakemu nadstropju namenimo 4 metre. 20 takih nadstropij znese 80 metrov, plus 10 metrov za pritličje. To znese skupaj 90 metrov.

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, ki vsebujejo pravilno metodo izračuna in razlago, vendar uporabijo le 20 nadstropij namesto 21. Na primer:

- Vsako stanovanje bi bilo lahko visoko 3,5 metra; 20 nadstropij po 3,5 skupaj znaša 70 metrov.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori, vključno z odgovori brez razlage, s pravilnim ali napačnim številom nadstropij, in odgovori z nesmiselno oceno višine vsakega nadstropja (4 metri so zgornja meja). Na primer: številom nadstropij, in odgovori z nesmiselno oceno višine vsakega nadstropja (4 metri so zgornja meja). Na primer:

- Vsako nadstropje je visoko približno 5 metrov, $5 \cdot 21$ pa znaša 105 metrov.
- 60 m.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

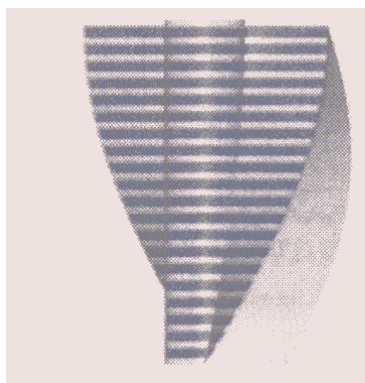
Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: javna oziroma širše družbena

Vprašanja v tej nalogi zahtevajo nekaj domišljije in vpogleda v elemente prostorske ureditve v javnosti, ki jo učenci seveda poznajo, vendar je način po povpraševanju takih informacij za veliko učencev lahko nov. Najprej naloga učenca sprašuje po neki razumni oceni višine vsakega nadstropja večnadstropne stavbe, namreč po oceni vidne višine sob v vsakem nadstropju skupaj z višino prostora, ki je potreben med nadstropji. Učenci morajo opraviti nekaj osnovnega modeliranja in prevesti vizualno prezentacijo v numerično. Te kompetence so povezane s razredom *povezovanja*.

Veliko učencev v predraziskavi je vse to znalo pravilno narediti, med njimi je bilo nekaj več dečkov kot deklic. Pokazalo pa se je tudi, da se je veliko učencev izognilo reševanju vprašanja, kar nam pove, da veliko število učencev ni hotelo ali pa ni bilo sposobno uporabiti svoje domišljije, kot je bilo zahtevano.

Spodnji sliki prikazujeta pogleda s strani na to zvito stavbo.



Pogled s 1. strani



Pogled z 2. strani

11.2 vprašanje

Iz katere smeri neba je bil narisani pogled s 1. strani?

- A Iz severne.
- B Iz zahodne.
- C Iz vzhodne.
- D Iz južne.

Točkovanje in opombe za vprašanje 11.2

Pravilen odgovor

Koda 1: C. Iz vzhodne.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: javna oziroma širše družbena

Drugo vprašanje od učencev zahteva, da v mislih primerjajo različne vizualne

prikaze stavbe in izberejo med možnostmi, ki bi lahko opisovale odnose med temi prikazi. Prostorsko sklepanje, ki je zahtevano v vprašanju, ga uvršča v razred *povezovanja*.

To vprašanje je lažje od prvega, vendar ima v številnih sodelujočih državah slabe merske lastnosti. Mogoče je, da je bila kakovost grafičnega prikaza v predraziskavi nezadostna za visoke vizualne zahteve vprašanja.

11.3 vprašanje

Iz katere smeri neba je bil narisani pogled z 2. strani?

- A Iz severozahodne.
- B Iz severovzhodne.
- C Iz jugozahodne.
- D Iz jugovzhodne.

Točkovanje in opombe za vprašanje 11.3

Pravilen odgovor

Koda 1: D. Iz jugovzhodne.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: javna oziroma širše družbena

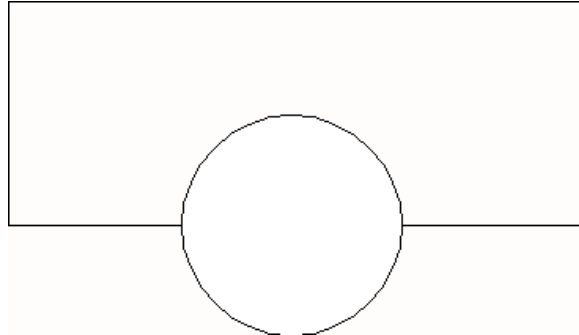
Tretje vprašanje je zelo podobno vprašanju 11.2. Pri obeh vprašanjih so podani različni vizualni namigi na obeh stranskih risih, ki so v pomoč pri reševanju. Vprašanje 11.3 je mogoče malo težje od vprašanja 11.2 zaradi dodatnih senc, ki so navzoče na sliki kot dodaten pripomoček pri reševanju in zahtev interpretacije, ki jih postavljajo.

11.4 vprašanje

Vsako nadstropje s stanovanji je nekoliko "zasukano" v primerjavi s pritličjem. Najvišje nadstropje (20. nadstropje nad pritličjem) je obrnjeno pravokotno na pritličje.

Spodnja risba prikazuje pritličje.

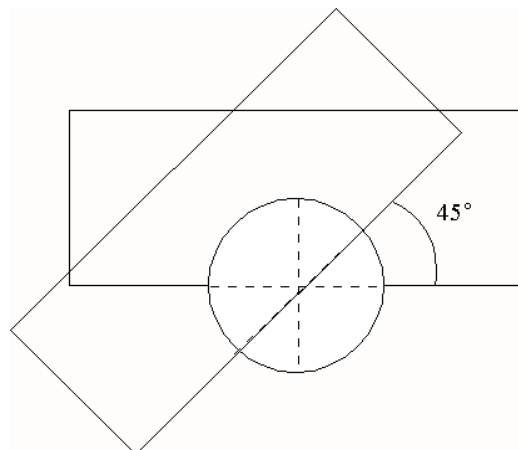
V risbo nariši načrt 10. nadstropja nad pritličjem, da pokažeš, kako je to nadstropje zasukano glede na pritličje.



Točkovanje in opombe za vprašanje 11.4

Pravilen odgovor

Koda 2: Odgovori, ki prikazujejo pravilno sliko, se pravi pravilno rotacijsko točko zasuka (središčno točko) in rotacijo v nasprotni smeri urinega kazalca. Sprejemljivi so koti od 40° do 50° .



Delno pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, ki nepravilno prikazujejo kot rotacije, ali rotacijsko točko, ali rotacijsko smer.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: prostor in oblike

Situacija: javna oziroma širše družbena

Četrty primer od učencev zahteva, da si predstavljajo skupni učinek rotiranja po nekajkratnih zasukih in da konstruirajo grafičen prikaz desetega nadstropja. Tudi v tem primeru prostorsko sklepanje, ki je del naloge, umešča to nalogo v kompetenčni razred *povezovanja*.

V predraziskavi se je izkazalo, da je ta naloga razmeroma težka in da se je odgovarjanju nanjo izognilo kar veliko število učencev. Zdi se, da je za 15-letnike taka vrsta geometrične konstrukcije velik izziv.

12. primer matematične naloge – ROCK KONCERT

12.1 vprašanje

Na rock koncertu je bilo za občinstvo rezervirano pravokotno polje velikosti 100 metrov krat 50 metrov. Koncert je bil razprodan in polje je bilo polno oboževalcev, ki so stali.

Katera izmed naslednjih ocen je najboljša za skupno število ljudi, ki so obiskali koncert?

- A 2000
- B 5000
- C 20 000
- D 50 000
- E 100 000

Točkovanje in opombe za vprašanje 12.1

Pravilen odgovor

Koda 1: C. 20 000.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje izbirnega tipa

Kompetenčni razred: povezovanje

Vsebinski sklop: količina

Situacija: javna oziroma širše družbena

Definicija *matematične pismenosti* poudarja pomen spretnosti približnega ocenjevanja, ki morajo biti del količinskih sposobnosti vsakega »matematično pismenega« posameznika. To naloga je postavljena v kontekst, ki naj bi bil precej dobro poznan številnim 15-letnim učencem. Vendar pa od učencev zahteva, da po interpretaciji danega konteksta, ki je ni veliko, aktivno sodelujejo pri oblikovanju domnev o povprečni količini prostora, ki ga ljudje zasedejo, ko stojijo v množici. Oblika predstavljenega problema in matematično sklepanje, ki je potrebno za njegovo reševanje, umeščata nalogo v razred *povezovanja*.

Učenci so imeli na voljo pet odgovorov in izbrati so morali najboljšega. Odgovor A nakazuje, da bi človek povprečno zasedel 2,5 kvadratnega metra, kar ne bi bil ravno dobro obiskan koncert. Odgovor E (100 000) nakazuje, da bi bilo na enem kvadratnem metru povprečno 20 ljudi, kar je skoraj nemogoče in zagotovo nerealno. Tako morajo učenci izbrati med tremi gostotami: 1 oseba, 4 osebe ali 10 oseb na

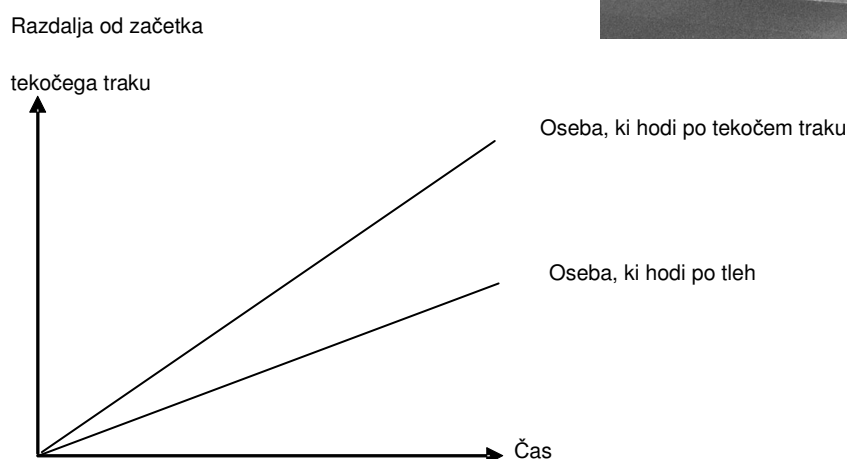
kvadratni meter, ki najbolj opisujejo dani kontekst (koncert je bil razprodan, polje pa polno ljudi, ki so stali). V predraziskavi je približno 30 odstotkov učencev izbralo najbolj smiselno srednjo možnost C (20 000).

13. primer matematične naloge – TEKOČI TRAKOVI

13.1 vprašanje

Na desni je fotografija tekočih trakov.

Spodnji graf razdalje v odvisnosti od časa prikazuje primerjavo med hojo po tekočem traku in hojo po tleh zraven tekočega traku.

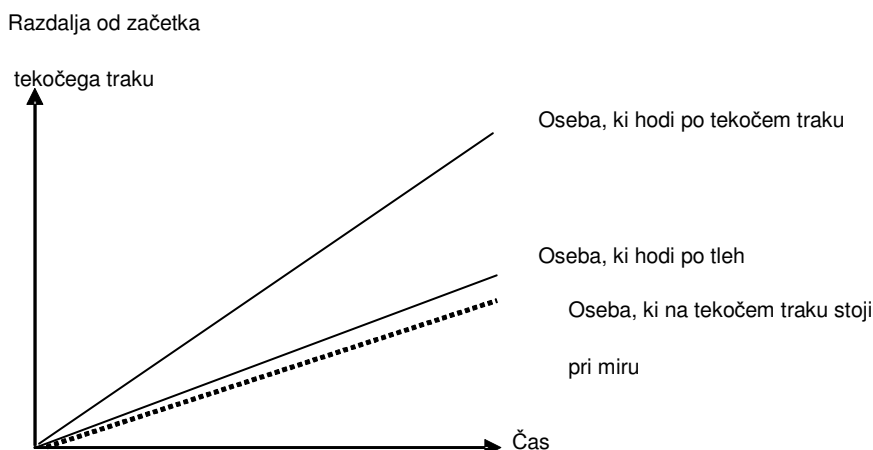


Če domnevamo, da je v zgornjem grafu hitrost hoje za obe osebi enaka, nariši v graf črto, ki bo predstavljala razdaljo v odvisnosti od časa za osebo, ki na tekočem traku stoji pri miru.

Točkovanje in opombe za vprašanje 13.1

Pravilen odgovor

Koda 1: Odgovori, v katerih je črta narisana pod obema, že obstoječima črtama, mora pa biti bliže črti za osebo, ki hodi po tleh, kot koordinatni osi za čas.



Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Tip vprašanja: vprašanje odprtega tipa

Kompetenčni razred: refleksija

Vsebinski sklop: spremembe in odnosi

Situacija: znanstvena

Naloga je motivacijska zaradi opisa situacije, ki jo je mogoče najti na številnih javnih mestih, hkrati pa spominja na podobne pojave, s katerimi je veliko 15-letnih učencev še bolj seznanjenih (kot je hoja ob tekočih stopnicah ali tek po stopnicah navzdol zraven dvigala). Vendar narava vprašanja v tej nalogi to umešča v *znanstveno* situacijo.

Učenci se morajo ukvarjati z matematično prezentacijo opisane situacije in morajo uporabiti domišljijo in vpogled, da bi jo razumeli. Za reševanje tega problema in konstruiranje ustreznega odgovora je potrebno precej zahtevno matematično sklepanje. Te kompetence so značilne za razred *reflektiranja*.

Rezultati predraziskave so pokazali, da je bilo ta naloga precej težka, saj je nanjo pravilno odgovorilo le 15 odstotkov učencev.

DODATNI PRIMERI MATEMATIČNIH NALOG

Sledi izbor sedmih dodatnih objavljenih nalog s skupno 16 vprašanji, ki ilustrirajo različne vidike matematične pismenosti raziskave PISA. Teh nalog slovenski učenci niso reševali, kljub temu pa so primerne za uporabo v šoli.

LIŠAJ

Posledica globalnega segrevanja je taljenje ledu nekaterih ledenikov. Dvanajst let po tem, ko led izgine, začnejo na skalah rasti drobne rastline, ki se imenujejo lišaji.

Vsak lišaj raste približno v obliki kroga.

Povezavo med premerom tega kroga in starostjo lišaja lahko približno izrazimo s formulo:

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{t - 12} \quad \text{za } t \geq 12,$$

v kateri d pomeni premer lišaja v milimetrih, t pa število let po tem, ko je led izginil.

1. vprašanje: LIŠAJ

M047Q01

Z uporabo formule izračunaj premer lišaja 16 let po tem, ko je led izginil.

Prikaži svoj izračun.

LIŠAJ: TOČKOVANJE 1

Pravilen odgovor

Koda 2: 14 mm (enota ni potrebna). Kodo 2 lahko dodelimo, če učenec napiše pravilen odgovor 14, ne glede na to, ali je izračun prikazan ali ne.

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Delno pravilni odgovori, vključno z:

- učenec pravilno zamenja številko v formuli, vendar je odgovor napačen ALI manjka;
- nepopolni odgovori, na primer $7\sqrt{4}$.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

Primeri odgovorov

Koda 2:

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{16 - 12}$$

14 mm

14

$$d = 14$$

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{16 - 12} \quad (\text{Vsi izračuni so pravilni, vendar je enota napačna. Domnevamo,}$$

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{4} \quad \text{da gre za spodrseljaj.)}$$

$$d = 14 \text{ let}$$

Koda 1:

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{16 - 12} \quad (\text{Napačen odgovor, vendar pravilna zamenjava.})$$

$$d = 16$$

$$d = 7,0 \cdot \sqrt{16 - 12} \quad (\text{Nepopoln odgovor.})$$

$$d = 7\sqrt{4}$$

Koda 0: 16

2. vprašanje: LIŠAJ

M047Q02

Ana je izmerila premer enega izmed lišajev in ugotovila, da meri 35 milimetrov.

Pred koliko leti je led na tem mestu izginil?

Prikaži svoj izračun.

LIŠAJ: TOČKOVANJE 2

Pravilen odgovor

Koda 2: 37 let (enota ni potrebna), ne glede na to, ali je izračun prikazan ali ne.

Delno pravilen odgovor

Koda 1: Učenec je pravilno zamenjal vrednosti v formuli, vendar je odgovoril napačno ali pa odgovor manjka.

ALI

36 let ali 38 let. (Učenci lahko do teh odgovorov pridejo s pomočjo metode poizkusov in napak).

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

Primeri odgovorov

Koda 2:

$$35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$$

$$5 = \sqrt{t-12}$$

$$25 = t - 12$$

$$t = 37$$

$$35 : 7 = 5$$

$$7 \cdot 5 = 7 \cdot \sqrt{25}$$

$$= 7 \cdot \sqrt{25+12}$$

$$= 7 \cdot 37$$

$$\therefore 37 \text{ let}$$

$$35/7 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$25+12 = 37$$

(Popolnoma napačen algebrski prikaz, vendar vemo, kaj učenec želi narediti.)

$$t = 15 \quad d = 12,1$$

$$t = 25 \quad d = 25,2$$

$$t = 40 \quad d = 37,0$$

$$t = 35 \quad d = 33,6$$

$$t = 37 \quad d = 35$$

(Tukaj je odgovor 37 vpet v enačbo, ki je pravilna.)

Torej 37 let po tem, ko je led izginil.

$$756 = 35 = 7 \cdot \sqrt{(37-12)} = 7 \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$$

Koda 1:

$$35 = 7,0 \cdot \sqrt{t-12}$$

$$35^2 = 7^2 \cdot t - 12$$

$$49t = 1237$$

$$t = 25$$

$$35 = 7,0 \cdot \sqrt{t-12}$$

$$5 = \sqrt{t-12}$$

$$25 = t^2 - 12^2$$

$$t = 13$$

$$35 = 7,0 \cdot \sqrt{t-12}$$

$$5 = \sqrt{t-12}$$

$$5 = \sqrt{t} - \sqrt{12}$$

Pretežko!

Koda 0:

$$35 = 7,0 \cdot \sqrt{t-12}$$

$$28 = \sqrt{t-12}$$

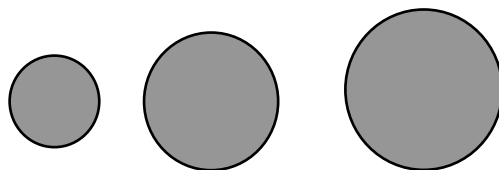
$$784 = t - 12$$

$$t = 796$$

40 let

KOVANCI

Prosijo te, da oblikuješ novo serijo kovancev. Vsi kovanci bodo okrogli in srebrne barve, imeli pa bodo različne premere.



Raziskovalci so ugotovili, da idealni sistem kovancev ustreza naslednjim zahtevam:

- Premer kovancev naj ne bo manjši od 15 mm in večji od 45 mm.
- Premer naslednjega kovanca mora biti od prvega večji vsaj za 30 odstotkov.
- Stroji v kovnici denarja lahko izdelujejo le kovance, katerih premer je cela številka v milimetrih (na primer 17 mm je dovoljeno, 17,3 mm ni dovoljeno).

1. vprašanje: KOVANCI

M143Q01

Naprošen si, da oblikuješ serijo kovancev, ki ustreza zgornjim zahtevam. Začeti moraš s 15-milimetrskim kovancem, tvoja serija pa naj vsebuje čim več kovancev. Kakšni bodo premeri kovancev v tvoji seriji?

KOVANCI: TOČKOVANJE 1

Koda 1: 15 – 20 – 26 – 34 – 45. Možno je, da je odgovor prikazan v obliki slik kovancev pravih premerov. Tudi takemu odgovoru dodelimo kodo 1.

Koda 8: Učenec navede serijo kovancev, ki ustrezajo zahtevam treh meril, vendar serija ne vsebuje toliko kovancev kot bi jih lahko, na primer 15 – 21 – 29 – 39, ali 15 – 30 – 45

ALI

prvi trije premeri so pravilni, zadnja dva sta napačna (15 – 20 – 26 -)

ALI

prvi štirje premeri so pravilni, zadnji je napačen (15 – 20 – 26 – 34 -).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

PICE

Picerija streže dve različno veliki okrogli pici enake debeline. Manjša s premerom 30 cm stane 30 zedov. Večja s premerom 40 cm stane 40 zedov.

1. vprašanje: PICE

M154Q01

Katero pico se bolj splača naročiti? Prikaži svoje sklepanje.

PICE: TOČKOVANJE 1

Koda 2: Učenec posreduje splošno sklepanje, da se površina pice povečuje hitreje kot njena cena in konča z ugotovitvijo, da se bolj splača naročiti večjo pico.

- Premer pic je enak kot njihova cena, vendar pa je količina pice, ki jo dobiš, utemeljena na podlagi premera², zato dobiš več pice za zed pri večji pici.

Koda 1: Učenec izračuna površino in količino na zed za vsako pico in ugotovi, da se bolj splača naročiti večjo pico.

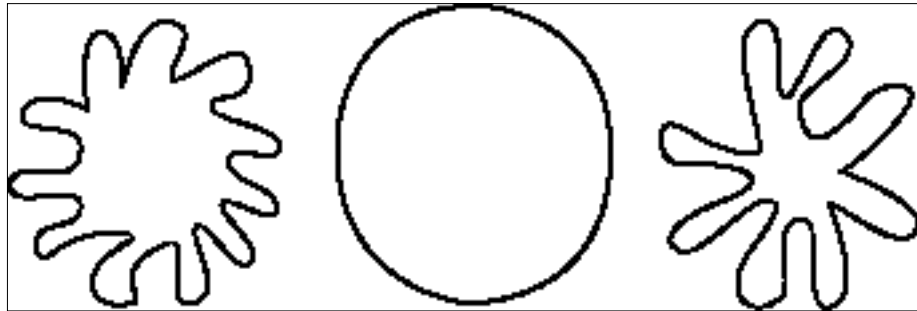
- Površina manjše pice je $0,25 \cdot \pi \cdot 30 \cdot 30 = 225\pi$; količina za zed je 23,6 cm² površina večje pice je $0,25 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 40 = 400\pi$; količina za zed je 31,4 cm² zato se bolj splača večja pica.

Koda 8: Obe pici se enako splača naročiti. (Ta napačni odgovor kodiramo ločeno, ker želimo izvedeti, koliko učencev ima takšno napačno predstavo).

Koda 0: Drugi nepravilni odgovori ALI pravilen odgovor brez pravičnega sklepanja.

Koda 9: Ni odgovora.

LIKI



A

B

C

1. vprašanje: LIKI

M158Q01

Kateri izmed likov ima največjo površino? Pojasni svoje sklepanje.

LIKI: TOČKOVANJE 1

Koda 1: Oblika B, s prepričljivim sklepanjem.

- Je največja površina, ker lahko druge umestimo vanjo.

Koda 8: Oblika B, brez verodostojne razlage.

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

Primeri odgovorov

Koda 1:

- B. Nima zajed, ki zmanjšujejo površino. A in C imata te zajed.
- B, ker je cel krog, druga dva lika sta kot kroga, pri katerih manjkajo delci.
- B, ker nima odprtih površin:



Koda 8:

- B, ker ima največjo površino.
- Krog. Je precej očitno.

- B, ker je večji.

Koda 0:

- Vsi so enaki.

2. vprašanje: LIKI

M158Q02

Opiši postopek za ocenjevanje površine oblike C.

LIKI: TOČKOVANJE 2

Koda 1: Primeren postopek:

- Učenec čez lik nariše mrežo kvadratkov in prešteje kvadratke, ki jih lik prekriva čez polovico.
- Učenec liku odreže roke in te dele prerazporedi tako, da zapolnijo kvadrat, nato pa izmeri stranice kvadrata.
- Učenec predlaga oblikovanje 3D modela v obliki lika, ki ga napolnimo z vodo. Izmerimo količino uporabljene vode in globino vode v modelu. Površino izpeljemo iz te informacije.

Koda 8: Delno pravilni odgovori:

- Učenec predlaga, da bo ugotovil površino kroga in odštel površino izrezanih kosov, vendar ne omeni, kako bo ugotovil površino izrezanih kosov.
- Učenec sešteje površino vsake posamezne roke lika.

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

OPOMBA:

Bistvo tega vprašanja je, ali učenec ponudi POSTOPEK za določanje površine. Kodirna shema (1, 8, 0) je hierarhija obsega, v katerem učenec opiše POSTOPEK.

Primeri odgovorov

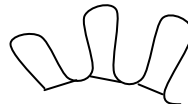
Koda 1:

- Lik bi lahko zapolnil z veliko krogi, kvadratki ali drugimi osnovnimi liki, tako da ne bo odprtin. Ugotoviš površino vseh oblik in jih sešteješ.
- Prerišeš lik na grafični papir in prešteješ, koliko kvadratkov zasede.
- Narišeš in prešteješ enako velike kvadratke. Manjši kvadratki = boljša natančnost (*Učenčev opis je zelo kratek, vendar popustimo, kar se tiče učenčevih pisnih spretnosti, in predlagani postopek sprejmemo kot pravilen*).

- Narediš 3D model, ga napolniš z natančno 1cm vode in nato izmeriš volumen vode, ki je potreben, da model napolniš.

Koda 8:

- Ugotoviš površino lika B in nato površine izrezanih delov, ki jih potem odšteješ od glavne površine.
- Minus oblika iz kroga.
- Sešteješ površino vsakega posameznega kosa, na primer
- Uporabiš tako obliko in vanjo vliješ tekočino.
- Uporabiš graf.
- Polovica površine lika B.
- Ugotoviš, koliko mm^2 je v eni izmed teh nogic, in pomnožiš z 8.



Koda 0:

- Uporabiš vrvico in izmeriš obseg lika. Vrvico napneš v obliki kroga in izmeriš površino kroga z uporabo πr^2 .
(V tem primeru je postopek, ki ga je učenec opisal, napačen).

3. vprašanje: LIKI

M158Q03

Opiši postopek za ocenjevanje obsega lika C.

LIKI: TOČKOVANJE 3

Koda 1: Primeren postopek:

- Učenec položi vrvico čez konture lika in nato izmeri dolžino uporabljene vrvice.
- Učenec izreže lik na kratke, skoraj ravne kose, jih združi skupaj v eno linijo in nato izmeri njeno dolžino.
- Učenec izmeri dolžino nekaterih rok, da ugotovi povprečno dolžino roke in nato množi z 8 (število rok) • 2.

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

Primeri odgovorov

Koda 1:

- Volna ali vrvica.

(Čeprav je v tem primeru odgovor kratek, je učenec ponudil POSTOPEK za merjenje obsega).

- Odreži stranske dele lika v posamezne dele. Vsakega izmeri in jih nato seštej.

(Učenec v tem primeru ni eksplicitno povedal, da mora biti vsak del približno raven, vendar domnevamo, da je to mislil. Šteje se, da s POSTOPKOM rezanja lika na koščke vsak kos z lahkoto izmerimo).

Koda 0:

- Izmeriš po zunanji strani.

(V tem primeru učenec ni predlagal nobenega POSTOPKA merjenja. Preprosta izjava "izmeriti" ne ponuja nobenega postopka, kako naj k merjenju pristopimo).

- Lik razvlečemo, tako da nastane krog.

(Čeprav učenec ponudi postopek, je ta napačen).

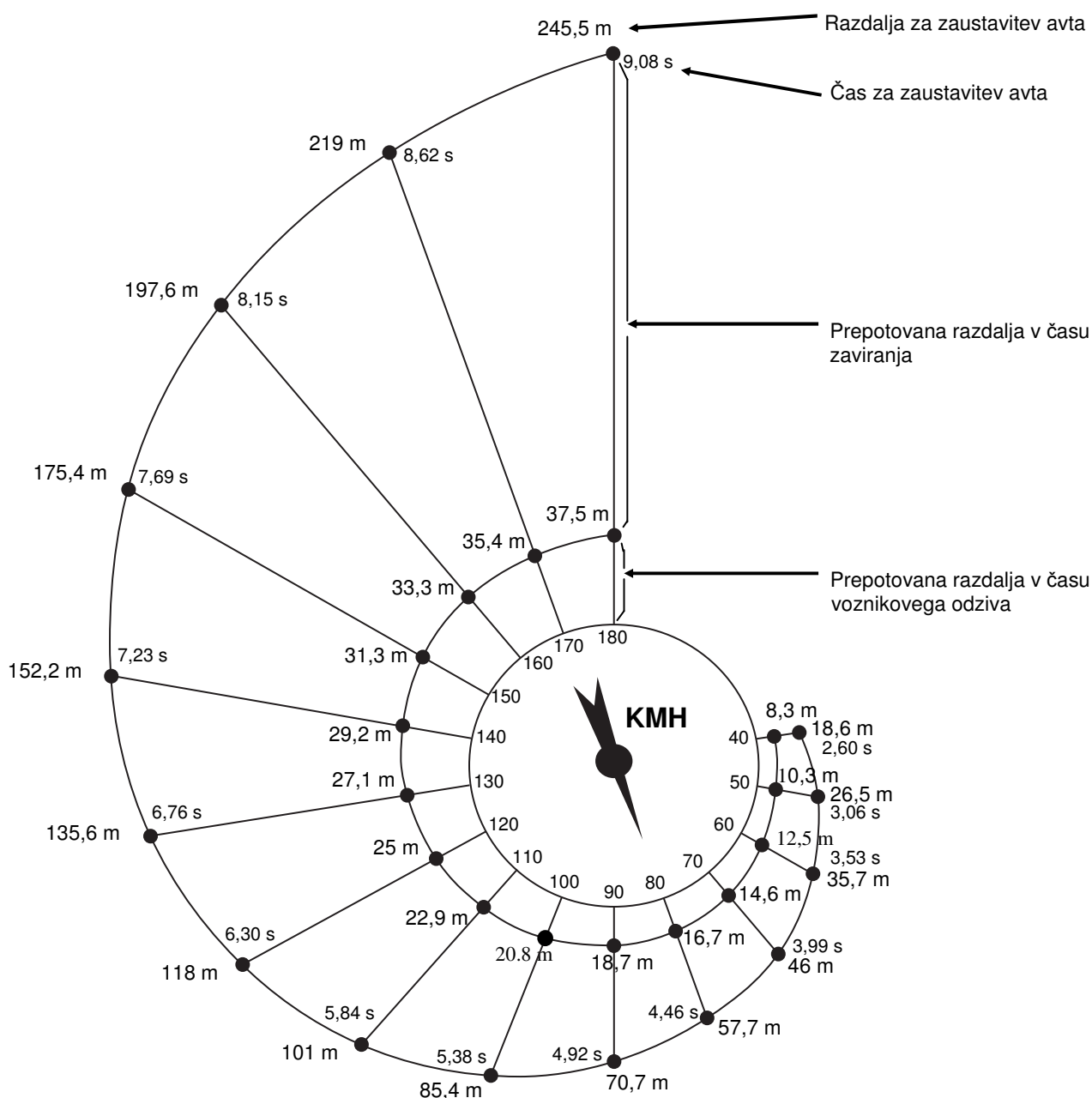
ZAVIRANJE

Približna razdalja, ki jo avto, ki se premika, potrebuje, da se zaustavi, je vsota:

razdalje, ki jo avto prepotuje v času, ki ga voznik porabi, da začne uporabljati zavore (razdalja odzivnega časa);

razdalje, ki jo avto prepotuje v času, ko se zavore uporabljajo (razdalja zaviranja).

Spodnji polžji diagram prikazuje teoretično razdaljo zaustavljanja za vozilo, ki ima dobre zavorne pogoje (zelo pozornega voznika, zavore in pnevmatike v popolnem stanju, suho cesto z dobro površino), ter koliko je razdalja ustavljanja odvisna od hitrosti.



1. vprašanje: ZAVIRANJE*M215Q01*

Če avto potuje s hitrostjo 110 km/h, kolikšno razdaljo prepotuje v času voznikovega odziva?

ZAVIRANJE: TOČKOVANJE 2

Koda 1: 22,9 metra (enota ni potrebna).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

2. vprašanje: ZAVIRANJE*M215Q01*

Če avto potuje s hitrostjo 110 km/h, kakšna je celotna razdalja, ki jo prepotuje, preden se ustavi?

ZAVIRANJE: TOČKOVANJE 2

Koda 1: 101 meter (enota ni potrebna).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

3. vprašanje: ZAVIRANJE*M215Q03*

Če avto potuje s hitrostjo 110 km/h, koliko časa potrebuje, da se popolnoma ustavi?

ZAVIRANJE: TOČKOVANJE 3

Koda 1: 5,84 sekunde (enota ni potrebna).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

4. vprašanje: ZAVIRANJE*M215Q04*

Če avto potuje s hitrostjo 110 km/h, kolikšno razdaljo prepotuje v času zaviranja?

ZAVIRANJE: TOČKOVANJE 4

Koda 1: 78,1 metra (enota ni potrebna).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

5. vprašanje: ZAVIRANJE*M215Q05*

Druga voznica, ki potuje v dobrih razmerah, zaustavi svoje vozilo v celotni razdalji 70,7 metra. S kakšno hitrostjo je avto potoval, preden so bile uporabljene zavore?

ZAVIRANJE: TOČKOVANJE 5

Koda 1: 90 km/h (enota ni potrebna).

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

DVORIŠČE

1. vprašanje: DVORIŠČE

M267Q01

Nik želi tlakovati pravokotno dvorišče pred svojo novo hišo. Dvorišče je dolgo 5,25 metra in široko 3,00 metre. Za en kvadratni meter potrebuje 81 opek.

Izračunaj, koliko opek potrebuje Nik za celotno dvorišče.

DVORIŠČE: TOČKOVANJE 1

Pravilen odgovor

Koda 2: 1275, 1276 ali 1275,75 (enota ni potrebna).

Delno pravilen odgovor

Koda 1: 15,75 (enota ni potrebna)

ALI

1215 opek za $5\text{m} \cdot 3\text{m}$

(To kodo dodelimo učencem, ki znajo izračunati število opek za celo število kvadratnih metrov, ne pa za decimalno število kvadratnih metrov. Glej primere odgovorov.)

ALI

Učenec napačno izračuna površino, vendar pravilno množi z 81.

ALI

Učenec zaokroži površino in pravilno množi z 81.

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

Primeri odgovorov

Koda 2:

$$5,25 \cdot 3 = 15,75 \cdot 81 = 1276$$

Koda 1:

$$5,25 \cdot 3 = 15,75$$

$$15,75 \cdot 81 = 9000$$

$$81 \cdot 15 = 1215; 1215 + 21 = 1236$$

$$5,25 \cdot 3,0 = 15,75 \text{ m}^2; \text{ zato } 15,75 \cdot 1275,75 = 1376 \text{ opek.}$$

(V tem primeru je učenec pravilno izračunal prvi del, drugi del pa napačno. Upoštevajte prvi del odgovora in prezrite drugi del. Dodelite kodo 1.)

5 m

	81	81	81	81	81
	81	81	81	81	81
	81	81	81	81	81

3 m

MENJALNI TEČAJ

Mei-Ling iz Singapurja se je pripravljala, da gre za tri mesece v Južnoafriško republiko na študijsko izmenjavo. Nekaj singapurskih dolarjev (SGD) je morala zamenjati v južnoafriške rande (ZAR).

1. vprašanje: MENJALNI TEČAJ

M413Q01

Mei-Ling je ugotovila, da je menjalni tečaj med singapurskimi dolarji in južnoafriškimi randi takšen:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling je po tem menjalnem tečaju zamenjala 3000 singapurskih dolarjev v južnoafriške rande.

Koliko denarja, v južnoafriških randih, je dobila Mei-Ling?

Odgovor:

MENJALNI TEČAJ: TOČKOVANJE 1

Pravilen odgovor

Koda 1: 12.600 ZAR (enota ni potrebna).

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

2. vprašanje: MENJALNI TEČAJ

M413Q02

Ko se je Mei-Ling po treh mesecih vrnila v Singapur, ji je ostalo 3900 ZAR. Zamenjala jih je nazaj v singapurske dolarje, pri tem pa ugotovila, da se je menjalni tečaj spremenil v:

1 SGD = 4,0 ZAR

Koliko denarja, v singapurskih dolarjih, je dobila Mei-Ling?

Odgovor:

MENJALNI TEČAJ: TOČKOVANJE 2

Pravilen odgovor

Koda 1: 975 SGD (enota ni potrebna).

Nepravilen odgovor

Koda 0: Drugi odgovori.

Koda 9: Ni odgovora.

3. vprašanje: MENJALNI TEČAJ

M413Q03

V teh treh mesecih se je menjalni tečaj spremenil s 4,2 na 4,0 ZAR za SGD.

Je bila sprememba menjalnega tečaja na 4,0 ZAR s 4,2 ZAR, ko je Mei-Ling južnoafriške rande menjala nazaj v singapurske dolarje, v njeno korist? Svoj odgovor podpi z razlago.

MENJALNI TEČAJ: TOČKOVANJE 3

Pravilen odgovor

Koda 11: Da, z ustrezno razlago.

- Da, z nižjim menjalnim tečajem (za 1 SGD) bo Mei-Ling dobila več singapurskih dolarjev za svoje južnoafriške rande.
- Da, 4,2 ZAR za en dolar bi zneslo 929 ZAR. [Opomba: učenec je napisal ZAR namesto SGD, vendar je jasno, da sta bila izpeljana pravi izračun in primerjava, zato lahko to napako spregledamo].
- Da, ker je dobila 4,2 ZAR za 1 SGD, zdaj pa mora plačati le 4,0 ZAR, da dobi 1 SGD.
- Da, ker je 0,2 ZAR ceneje za vsak SGD.
- Da, ker ko deliš s 4,2 je rezultat manjši kot takrat, ko deliš s 4.
- Da, je bila v njeno korist, ker, če se ne bi zmanjšala, bi dobila približno \$ 50 manj.

Nepravilen odgovor

Koda 01: Da, brez razlage ali z neustrezno razlago.

- Da, nižji menjalni tečaj je boljši.
- Da, sprememba je bila v korist Mei-Ling, ker če se ZAR zniža, bo imela več denarja, ki ga lahko zamenja v SGD.
- Da, bila je v korist Mei-Ling.

Koda 02: Drugi odgovori.

Koda 99: Ni odgovora.

VIRI

- Blum, W. (1996). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven, in G. Kadunz et al. (eds.), Trends und Perspektiven: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Vol. 23, Hoelder-Pichler-Tempsky, Wien.
- Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools (1982). Mathematics Counts (The Cockcroft Report), Her Majesty's Stationary Office, London.
- de Corte, E., B. Greer and L. Verschaffel (1996). Mathematics Teaching and Learning, in D.C. Berliner and R.C. Calfee (eds.), Handbook of Educational Psychology, Macmillan, New York.
- de Lange, J. (1987). Mathematics, Insight and Meaning, CD-Press, Utrecht.
- de Lange, J. (1995). Assessment: No Change without Problems, in T.A. Romberg (ed.), Reform in School Mathematics, SUNY Press, Albany.
- de Lange, J. and H. Verhage (1992). Data Visualization, Sunburst, Pleasantville.
- Devlin, K. (1994). Mathematics, the Science of Patterns, Scientific American Library, New York.
- Dossey, J.A. (1997). Defining and Measuring Quantitative Literacy, in L.A. Steen, (ed.), Why Numbers Count, The College Board, New York.
- Fey, J. (1990). Quantity, in L.A. Steen (ed.), On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy, National Academy Press, Washington, D.C.
- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task, D. Reidel, Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel, Dordrecht.
- Garfield, J. and A. Ahlgren (1988). Difficulties in Learning for Research, Journal for Research and Statistics: Implications Education, 19(1), 44-63.
- Gee, J. (1998). Preamble to a Literacy Program, Department of Curriculum and Instruction, Madison.
- Grünbaum, B. (1985). Geometry Strikes Again, Mathematics Magazine, 58 (1).
- LOGSE (1990). Ley de Ordenacion General del Sistema Educativo, LOGSE, Madrid.
- Masters, G., R. Adams and M. Wilson (1999). Charting Studnets Progress, in G. Masters and J. Keeves (eds.), Advances in Measurement in Educational Research and Assessment, Amsterdam, Elsevier Science.

- Masters, G. and M. Forster (1996). *Progress Maps*, Australian Council for Educational Research, Melbourne.
- Mathematical Association of America – MAA (1923). *The Re-organization of Mathematics in Secondary Education: A Report of the National Committee on Mathematical Requirements*, MAA, Oberlin.
- Mathematical Sciences Education Board – MSEB (1990). *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework of Curriculum*, National Academy Press, Washington, D.C.
- Mitchell, J., E. Hawkins, P. Jawerth, F. Stancavage and J. Dossy (2000). *Students Work and Teacher Practice in Mathematics*, National Center for Education Statistics, Washington, D.C.
- National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston.
- Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica* Auctore Is. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali. Imprimatur. S. Pepys, Reg. Soc. Praese. Julii 5. 1686. Londoni, Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDDCLXXXVII. (English Translation: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, published by University of California Press, Berkley, 1934).
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston.
- Niss, M. (1999). *Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse*, Uddanneise, 9.
- OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills: A New Framework for Assessment*, OECD, Paris.
- OECD (2002a). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment*, OECD, Paris.
- OECD (2003a). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OECD, Paris.
- OECD (2004). *Problem Solving for Tomorrows World*, OECD, Paris.
- OECD (2005). *Are Students Ready for a Technology-Rich World? What PISA Studies Tell Us*, OECD, Paris.
- Schupp, H. (1988). *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen*, *Der Mathematikunterricht* 34 (6).
- Steen, L.A. (1990). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press, Washington, D.C.

- Steen, L.A. (ed.) (1997). *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America*, The College Board, New York.
- Stewart, K. (1990). Change, in L.A. Steen (ed.). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press, Washington, D.C.
- Tversky, A. and D. Kahneman (1974). Judgments under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, 185, p.p. 1124-1131.

